

## 7 Teoria da Detecção e da Estimação em Problemas de Telecomunicações

Neste capítulo iremos introduzir os conceitos fundamentais da Teoria da Detecção e da Estimação bem como as técnicas básicas de processamento de sinal que decorrem da sua aplicação em problemas típicos das telecomunicações. As técnicas que iremos considerar, embora introduzidas naquele âmbito encontram aplicação em muitas outras áreas da engenharia e, em particular, na robótica.

### 7.1 Modelo Conceptual de um Sistema de Comunicação Digital

De seguida iremos abordar alguns tópicos da Teoria da Detecção e da Estimação com aplicação nos sistemas de comunicação digital que temos vindo a estudar. Começemos por recordar o modelo conceptual de um sistema de comunicação digital ilustrado na Figura 7.1.

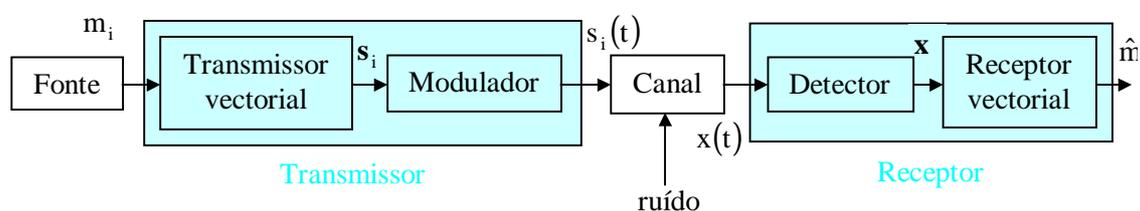


Figura 7.1: Modelo conceptual de um sistema de comunicação digital

A fonte de informação gera símbolos  $m_i$  de um alfabeto  $M$ -ário a uma taxa  $r = 1/T$  símbolos por segundo (baud). Como é sabido, o transmissor faz corresponder a cada símbolo um sinal de energia de duração finita  $T$ ,  $s_i(t)$ . O conjunto destes sinais forma um espaço vectorial (espaço de sinal) de dimensão finita  $N \leq M$ , o qual pode ser representado por uma base ortonormada de sinais  $\phi_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . A cada sinal  $s_i(t)$  corresponde assim um vector<sup>1</sup>

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (7.1)$$

cujos componentes se obtêm por projecção ortogonal de  $s_i(t)$  em cada um dos sinais da base  $\phi_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , isto é,

$$s_{in} = \langle s_i, \phi_n \rangle = \int_0^T s_i(t) \phi_n(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (7.2)$$

Em termos operacionais, estes componentes obtêm-se recorrendo a um banco de correladores como se mostra na Figura 7.2-(a). Por outro lado, dado o vector  $\mathbf{s}_i$ , pode sintetizar-se o sinal  $s_i(t)$  usando a combinação linear

$$s_i(t) = \sum_{n=1}^N s_{in} \phi_n(t), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (7.3)$$

<sup>1</sup> Vectors e matrizes serão denotados por letras a **bold** minúsculas e maiúsculas, respectivamente.

Esta operação de síntese pode ser realizada como se mostra na Figura 7.2-(b). Sublinhe-se ainda que, de acordo com a relação de Parseval, a energia do sinal  $s_i(t)$  é dada por

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt = \sum_{n=1}^N s_{in}^2, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (7.4)$$

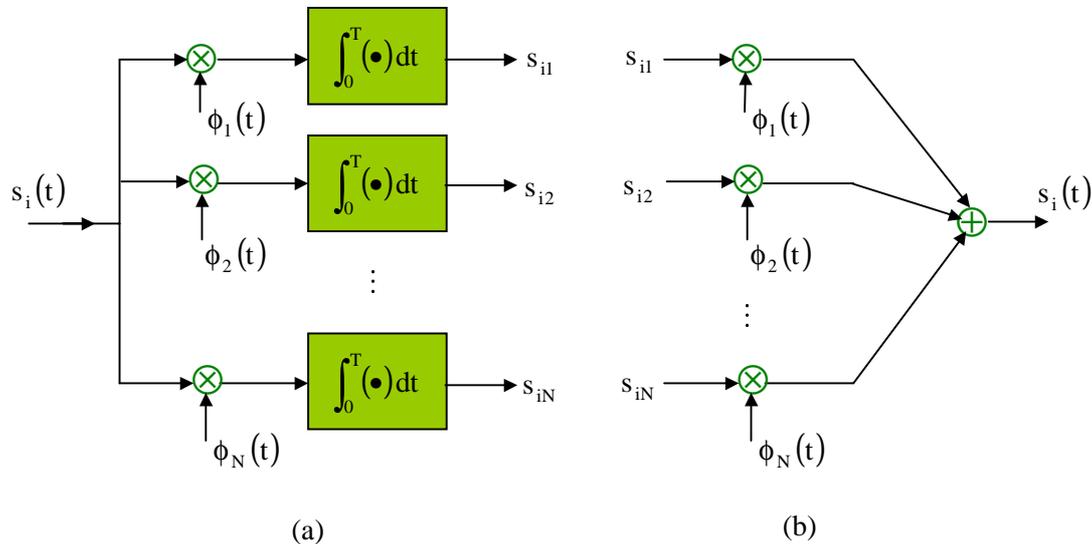


Figura 7.2: (a) banco de correladores; (b) síntese de  $s_i(t)$

Sobre o canal de transmissão assumem-se as seguintes hipóteses:

- H1.** é um sistema linear invariante que não introduz distorção sobre os sinais transmitidos;
- H2.** introduz ruído aditivo branco gaussiano.

Deste modo, e para cada intervalo de sinalização, o sinal de saída do canal de transmissão vem dado por

$$X(t) = s_i(t) + W(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (7.5)$$

onde  $W(t)$  representa o ruído de média nula, cujas funções de autocorrelação e densidade espectral de potência são, respectivamente,

$$R_w(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau) \quad (7.6)$$

e

$$G_w(f) = \frac{\eta}{2}. \quad (7.7)$$

O problema que aqui se põe é o de, dada a observação  $x(t)$  (amostra do processo  $X(t)$ ) ou a sua representação equivalente  $\mathbf{x}$  no espaço de sinal, determinar o símbolo transmitido  $m_i$ . A representação equivalente  $\mathbf{x}$  obtém-se por projecção ortogonal usando o banco de correladores representado na Figura 7.2-(a). Na hipótese de ter sido transmitido o sinal  $s_i(t)$ , então

$$H_i : X(t) = s_i(t) + W(t), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (7.8)$$

a saída de cada correlador é constituída por uma componente  $x_n$  dada por

$$x_n = \langle x, \phi_n \rangle = \langle s_i, \phi_n \rangle + \langle w, \phi_n \rangle = s_{in} + w_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (7.9)$$

Em notação vectorial, pode escrever-se

$$H_i : \mathbf{x} = \mathbf{s}_i + \mathbf{w}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (7.10)$$

onde  $\mathbf{w}$  representa o vector de ruído cujas componentes estão definidas em (7.9). A Figura 7.3 dá conta da interpretação geométrica do modelo (7.10). É a partir deste modelo que o receptor tem de identificar o símbolo transmitido no intervalo de sinalização correspondente, naturalmente baseado num critério de optimização do respectivo desempenho, por exemplo, a probabilidade de erro por símbolo. Para resolver este problema é conveniente começar por caracterizar o vector de ruído  $\mathbf{w}$ .

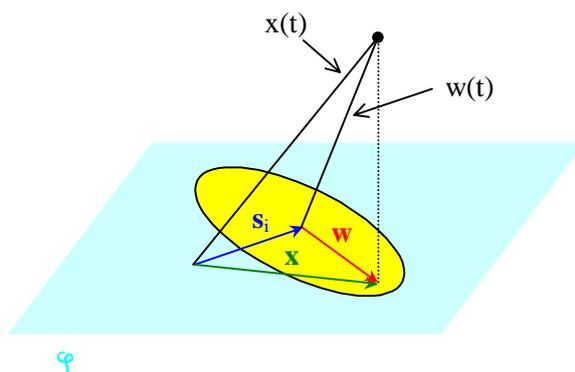


Figura 7.3: Representação do sinal observado  $x(t)$  no espaço de sinal  $\mathcal{S}$

## 7.2 Resposta de um Banco de Correladores a Ruído Branco Gaussiano

Da definição de produto interno (7.2), concluímos que

$$w_n = \langle \mathbf{w}, \phi_n \rangle = \int_{-\infty}^T w(t) \phi_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (7.11)$$

Note-se que as componentes de  $\mathbf{w}$  se obtêm através de uma transformação linear de um processo gaussiano e, portanto, são também gaussianas. Como  $W(t)$  tem média nula, o vector  $\mathbf{w}$  tem também média nula. Por outro lado, usando (7.11) pode escrever-se

$$E\{w_n w_m\} = E\left\{ \int_0^T w(\mu) \phi_n(\mu) d\mu \int_0^T w(v) \phi_m(v) dv \right\}.$$

Rearranjando termos, permutando o operador valor expectável com a integração, e tendo em conta (7.6),

$$\begin{aligned} E\{w_n w_m\} &= \int_0^T \int_0^T E\{w(\mu) w(v)\} \phi_n(\mu) \phi_m(v) d\mu dv \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{\eta}{2} \delta(\mu - v) \phi_n(\mu) \phi_m(v) d\mu dv \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T \phi_n(\mu) \phi_m(\mu) d\mu = \begin{cases} \eta/2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

isto é, a matriz de covariância do vector aleatório  $\mathbf{w}$  é dada por

$$\mathbf{C}_w = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = \frac{\eta}{2} \mathbf{I}_N. \quad (7.12)$$

onde  $\mathbf{I}_N$  é a matriz identidade de dimensão  $N$ . Portanto, em (7.10), o vector de ruído é gaussiano, tem média nula e matriz de covariância dada por (7.12). Assim, tendo em conta que a função densidade de probabilidade de um vector gaussiano  $\mathbf{x}$ ,  $N$ -dimensional, de média  $\mathbf{m}_x$  e matriz de covariância

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\}$$

é dada por

$$f_x(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{C})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{m}_x)\mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{m}_x)\right), \quad (7.13)$$

a função densidade de probabilidade do vector de ruído na saída do banco de correladores é

$$f_w(\mathbf{u}) = (\pi\eta)^{-N/2} \exp(-\eta^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^T). \quad (7.14)$$

### 7.3 Critério de Bayes: Receptor de Máxima Verosimilhança

Para simplificar o problema vamos considerar o caso de uma fonte binária,  $M=2$ , cujos símbolos têm probabilidades de ocorrência  $p_0$  e  $p_1$ , respectivamente. Sejam  $H_0$  e  $H_1$  as hipóteses que se verificam pela transmissão dos sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$ , correspondentes aos símbolos  $m_0$  e  $m_1$ , respectivamente. Teremos assim

$$H_0 : x(t) = s_0(t) + w(t) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{w} \quad (7.15)$$

$$H_1 : x(t) = s_1(t) + w(t) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{w}. \quad (7.16)$$

A Figura 7.4 ilustra de forma simbólica o sistema de comunicação binário cujo receptor se pretende construir. O canal de transmissão é regido por um mecanismo de transição caracterizado pelas funções  $f_{x|H_0}$  e  $f_{x|H_1}$ , isto é, as densidades de probabilidade das observações condicionadas pela verificação das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ , respectivamente. Tendo em conta as relações (7.15) e (7.16), e sabendo que  $\mathbf{w}$  é um vector gaussiano de média nula e matriz de covariância dada por (7.12), isto é,  $\mathbf{w} \sim N_w(\mathbf{0}, (\eta/2)\mathbf{I}_N)$ , (ver(7.14)), conclui-se que  $\mathbf{x}|H_0 \sim N_x(\mathbf{s}_0, (\eta/2)\mathbf{I}_N)$  e  $\mathbf{x}|H_1 \sim N_x(\mathbf{s}_1, (\eta/2)\mathbf{I}_N)$ , ou seja, (ver (7.13)),

$$f_{x|H_0}(\mathbf{u}) = (\pi\eta)^{-N/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta}\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_0\|^2\right) \quad (7.17)$$

$$f_{x|H_1}(\mathbf{u}) = (\pi\eta)^{-N/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta}\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_1\|^2\right). \quad (7.18)$$

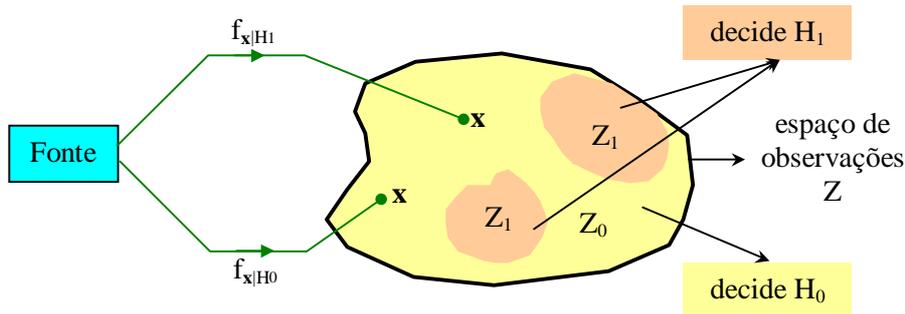


Figura 7.4: Representação simbólica de um sistema de comunicações binário

Seja  $Z$  o espaço de observações, o qual, no presente contexto, se identifica com o espaço de sinal  $\mathcal{S}$ . O problema de identificação dos símbolos transmitidos resume-se à determinação de uma partição  $[Z_0, Z_1]$  de  $Z$  tal que: se a observação  $\mathbf{x} \in Z_0$ , então o receptor decide pela hipótese  $H_0$  e, caso contrário, pela hipótese  $H_1$ . De acordo com o critério de Bayes, as regiões  $Z_0$  e  $Z_1$  são escolhidas por forma a minimizar a função de custo

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & C_{00}p_0 \Pr\{\text{decidir } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}\} \\ & + C_{10}p_0 \Pr\{\text{decidir } H_1 \mid H_0 \text{ é verdadeira}\} \\ & + C_{11}p_1 \Pr\{\text{decidir } H_1 \mid H_1 \text{ é verdadeira}\} \\ & + C_{01}p_1 \Pr\{\text{decidir } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira}\}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Na expressão anterior,  $C_{10}$  e  $C_{01}$  são os factores de risco que penalizam as decisões erradas, enquanto que  $C_{00}$  e  $C_{11}$  penalizam as decisões correctas. Em geral, é razoável escolher os factores de custo de modo que  $C_{10} > C_{00}$  e  $C_{01} > C_{11}$ . Em particular, se fizermos

$$\begin{cases} C_{00} = C_{11} = 0 \\ C_{01} = C_{10} = 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} p_0 = p \\ p_1 = 1 - p, \end{cases}$$

então a função de custo (7.19) degenera na probabilidade de erro

$$\begin{aligned} P_e &= p \Pr\{\text{decidir } H_1 \mid H_0 \text{ é verdadeira}\} + (1 - p) \Pr\{\text{decidir } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira}\} \\ &= p \Pr\{\mathbf{x} \mid H_0 \in Z_1\} + (1 - p) \Pr\{\mathbf{x} \mid H_1 \in Z_0\} \end{aligned}$$

ou seja,

$$P_e = p \int_{Z_1} f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + (1 - p) \int_{Z_0} f_{\mathbf{x}|H_1}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (7.20)$$

Uma vez que

$$Z = Z_0 \cup Z_1, \int_Z f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{u})d\mathbf{u} = 1 \text{ e } \int_{Z_1} f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{u})d\mathbf{u} = 1 - \int_{Z_0} f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{u})d\mathbf{u},$$

então minimizar (7.21) é o mesmo que minimizar

$$P_e = p + \left\{ \int_{Z_0} \left[ (1-p)f_{\mathbf{x}|H_1}(\mathbf{u}) - pf_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{u}) \right] d\mathbf{u} \right\}. \quad (7.22)$$

A primeira parcela do lado direito de (7.22) é um parâmetro fixo, enquanto que a segunda representa o custo (em termos de probabilidade de erro) que é controlado pelos pontos  $\mathbf{x}$  que são atribuídos à região  $Z_0$ . Por outro lado, os dois termos entre [ ] são ambos positivos. Então, os vectores  $\mathbf{x}$  para os quais o segundo destes termos é superior ao primeiro devem ser atribuídos à região  $Z_0$ , pois só assim contribuem para diminuir o valor do integral. Ao contrário, os vectores  $\mathbf{x}$  que contribuiriam positivamente para o valor do integral devem ser atribuídos à região  $Z_1$ . Nestas condições, a regra de decisão que deve ser realizada pelo receptor de modo a minimizar a probabilidade de erro é a seguinte

$$\frac{f_{\mathbf{x}|H_1}(\mathbf{x})}{f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{x})} \underset{H_0}{>} \frac{p}{(1-p)} \Leftrightarrow \lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{>} \gamma, \quad (7.23)$$

onde  $\lambda(\mathbf{x})$  é a **razão de verosimilhança** e  $\gamma$  é o **limiar de decisão**. Note-se que a equação em  $\mathbf{x}$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \gamma$$

define a **fronteira entre as duas regiões de decisão  $Z_0$  e  $Z_1$** . Nos pontos que constituem a fronteira, a decisão por  $H_0$  ou  $H_1$  é indiferente.

No caso que temos vindo a estudar, em que o **ruído é gaussiano**, é completamente caracterizado pelas densidades de probabilidade condicionais (7.17) e (7.18) e pelo parâmetro  $p$ , a regra de decisão (7.23) toma a forma particular

$$\exp\left(-\frac{1}{\eta} \left( \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_1\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_0\|^2 \right)\right) \underset{H_0}{>} \frac{p}{1-p},$$

ou ainda

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_1\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_0\|^2 \underset{H_0}{<} -\eta \ln\left(\frac{p}{1-p}\right). \quad (7.24)$$

Finalmente, se os **símbolos binários forem equiprováveis**,  $p = 1/2$ , e (7.24) simplifica-se para

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_1\|^2 \underset{H_0}{<} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_0\|^2, \quad (7.25)$$

isto é, **o receptor decide pelo símbolo associado ao vector sinal cujo afixo está mais próximo do ponto observado  $\mathbf{x}$** . Chama-se a atenção para o facto de que esta regra de decisão, sendo, digamos assim, uma regra intuitiva, é ótima (no sentido em que minimiza a probabilidade de erro) apenas quando o ruído é gaussiano e de média nula, e os símbolos gerados pela fonte são equiprováveis. Usando a definição de norma, temos

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{s}_i\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i \rangle, \quad i = 0, 1,$$

e a regra de decisão (7.25) passa à forma equivalente

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2}, \quad (7.26)$$

onde  $E_i = \|\mathbf{s}_i\|^2$ ,  $i = 0, 1$ , é a energia do sinal  $s_i(t)$ ,  $i = 0, 1$ . As regras (7.25) e (7.26) são como vimos equivalentes e definem o **receptor de máxima verosimilhança**, caso particular do receptor de mínima probabilidade de erro que resulta da equiprobabilidade dos símbolos fonte.

### 7.3.1 Probabilidade de Erro Mínima

A probabilidade de erro pode ser calculada em termos da probabilidade de decidir correctamente. Num sistema M-ário, a probabilidade de decidir pelo símbolo  $m_i$  sendo que foi este o símbolo transmitido é obviamente dada por

$$\Pr\{m_i, H_i\} = p_i \int_{Z_i} f_{\mathbf{x}|H_i}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Sendo  $P_a$  a probabilidade de ser tomada a decisão correcta, então a **probabilidade de erro** vale

$$P_e = 1 - P_a = 1 - \sum_{i=1}^M p_i \int_{Z_i} f_{\mathbf{x}|H_i}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (7.27)$$

O cálculo da probabilidade de erro em forma fechada pode ser, em muitos casos, complicado ou mesmo impossível. No entanto, para os casos mais simples, como os apresentados nos parágrafos seguintes, é possível obter expressões em forma fechada. A dificuldade associada ao cálculo da probabilidade de erro está sobretudo dependente da forma das regiões de decisão  $Z_i$  e das funções densidade de probabilidade condicional  $f_{\mathbf{x}|H_i}(\mathbf{u})$ .

### 7.3.2 Sinais Ortogonais com Igual Energia

Consideremos os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  com igual energia  $E$  representados na Figura 7.5-(a), os quais, como se pode verificar, são ortogonais. O espaço de sinal tem assim dimensão dois e é gerado pela base ortonormada formada pelos sinais  $\phi_0(t)$  e  $\phi_1(t)$  tais que  $s_i(t) = \sqrt{E}\phi_i(t)$ ,  $i = 0, 1$ . Nestas condições, a regra (7.26) simplifica-se ainda mais

$$\langle \mathbf{x}(t), \phi_1(t) \rangle = x_1 \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} x_0 = \langle \mathbf{x}(t), \phi_0(t) \rangle$$

e pode ser levada à prática pelo receptor que se mostra na Figura 7.5-(c). Da expressão anterior, conclui-se ainda que a fronteira entre as regiões de decisão  $Z_0$  e  $Z_1$  é definida pela

recta  $x_1 = x_0$ , como se vê na Figura 7.5-(b). De seguida, iremos calcular a expressão da probabilidade de erro de transmissão para o caso deste sistema.

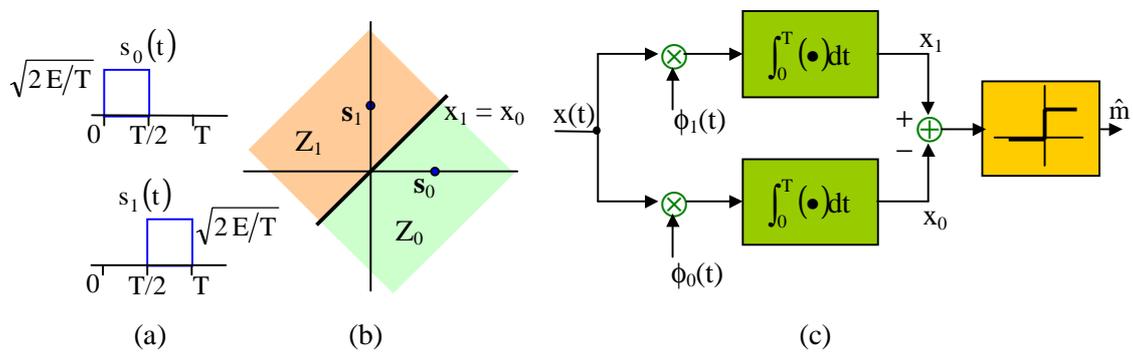


Figura 7.5: (a) sinais ortogonais; (b) regiões de decisão no espaço de sinal; (c) receptor

**Probabilidade de erro mínima.** No caso presente, a densidade de probabilidade da observação condicionada nas hipótese  $H_0$  ou  $H_1$  é, como já vimos (eqs. (7.17) e (7.18)), dada por

$$f_{x|H_i}(\mathbf{u}) = (\pi\eta)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{\eta} \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_i\|^2\right), \quad i = 0, 1.$$

A forma quadrática do expoente impõe que esta densidade de probabilidade tenha simetria circular em torno do valor médio  $\mathbf{s}_i$ , como se ilustra na Figura 7.6 onde  $d$  é a distância entre  $\mathbf{s}_0$  e  $\mathbf{s}_1$ . Note-se que toda a geometria é simétrica relativamente à recta  $x_1 = x_0$ . Isto significa que os integrais em (7.27) são todos iguais e podem ser calculados usando o sistema de eixos  $(v_0, v_1)$  em vez de  $(u_0, u_1)$ .

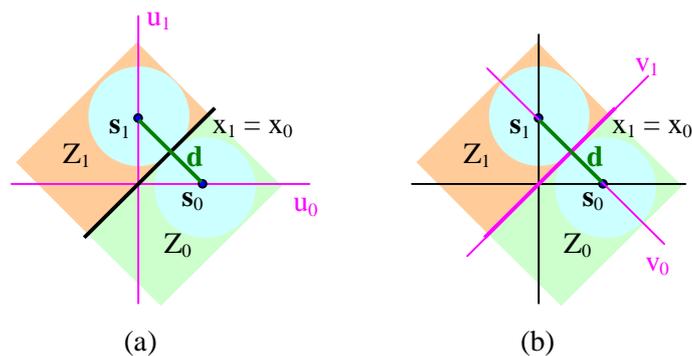


Figura 7.6: (a) sistema original de coordenadas; (b) sistema de coordenadas rodado de  $\pi/4$

Assim, usando (7.27) e o facto dos símbolos serem equiprováveis, podemos escrever

$$\begin{aligned}
P_e &= 1 - \int_{Z_1} f_{x|H_1}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\
&= 1 - \int_{Z_1} f_{x|H_1}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi\eta)^{-1} \exp\left(-\eta^{-1}\left((v_0 + d/2)^2 + v_1^2\right)\right) dv_0 dv_1 \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\eta^{-1}v_1^2\right) dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\eta^{-1}(v_0 + d/2)^2\right) dv_0.
\end{aligned}$$

Note-se que no sistema de eixos  $(v_0, v_1)$  o ponto  $s_1 = [-d/2, 0]$ . Na última linha da expressão anterior o integral em  $v_1$  é igual a 1 pois a integranda é uma gaussiana de média nula e variância  $\eta/2$ . Se no integral em  $v_0$  fizermos a mudança de variável  $\mu = \eta^{-1/2}(v_0 + d/2)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
P_e &= 1 - \left(1/\sqrt{\pi}\right) \int_{-\infty}^{d/(2\sqrt{\eta})} \exp(-\mu^2) d\mu \\
&= \left(1/\sqrt{\pi}\right) \int_{d/(2\sqrt{\eta})}^{+\infty} \exp(-\mu^2) d\mu,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right), \quad (7.28)$$

onde se fez  $d = \sqrt{2E}$  e se usou a definição da [função erro complementar](#)

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-\mu^2) d\mu, \quad x \geq 0. \quad (7.29)$$

### 7.3.3 Sinais Antipodais com Igual Energia

Consideremos agora o caso em que  $s_0(t) = -s_1(t)$  e, de novo, com energia  $E$ . Neste caso, os dois sinais são linearmente dependentes e, portanto, o espaço de sinal tem dimensão 1. Pode escolher-se, por exemplo,  $\phi(t) = \sqrt{E}s_0(t)$  para versor da recta real que constitui o espaço de sinal. Usando (7.26), a regra de decisão é agora

$$\langle x(t), s_1(t) \rangle = -\sqrt{E} \langle x(t), \phi(t) \rangle = -x \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} x = \sqrt{E} \langle x(t), \phi(t) \rangle = \langle x(t), s_0(t) \rangle$$

ou seja,

$$x \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} 0.$$

A Figura 7.7 ilustra este esquema de sinalização (a), mostrando o espaço de sinal (b) e o diagrama de blocos do receptor (c).

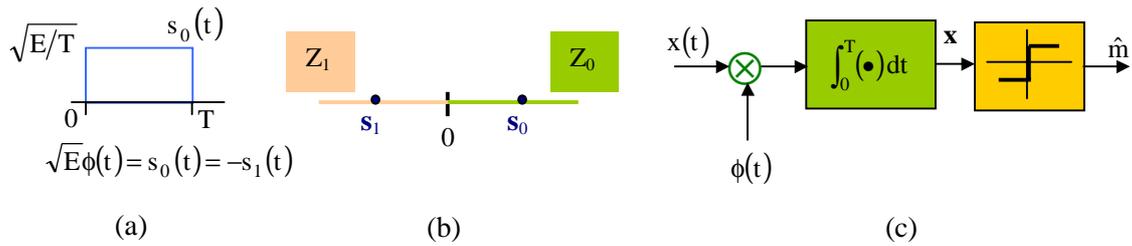


Figura 7.7: (a) sinais antipodais; (b) regiões de decisão no espaço de sinal; (c) receptor

**Probabilidade de erro mínima.** Neste caso, as funções densidade de probabilidade condicionais das observações são

$$f_{X|H_i}(u) = (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta}[u - s_i]^2\right), \quad i = 0, 1,$$

onde  $s_i = \pm\sqrt{E}$  como se verifica a partir da Figura 7.7. A Figura 7.8 mostra aquelas densidades de probabilidade.

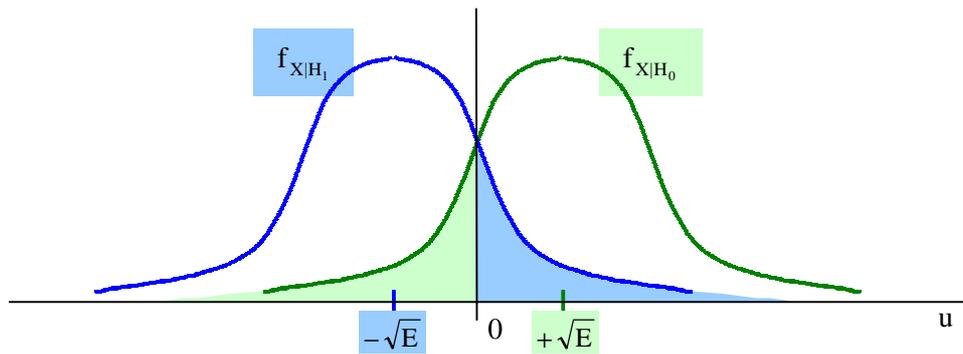


Figura 7.8: Densidades de probabilidade condicionais

Tal como no caso estudado no parágrafo 7.3.2, a probabilidade de erro é dada por

$$P_e = 1 - \int_{Z_1} f_{X|H_1}(u) du = 1 - \int_{Z_0} f_{X|H_0}(u) du,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - \int_0^{+\infty} (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta}[u - d/2]^2\right) du \\ &= 1 - \int_{-\infty}^0 (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta}[u + d/2]^2\right) du, \end{aligned}$$

onde  $d = 2\sqrt{E}$  é a distância entre os sinais  $s_0$  e  $s_1$ . Procedendo como em 7.3.2, obtém-se

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}}\right). \quad (7.30)$$

É fácil verificar que este valor da probabilidade de erro corresponde a qualquer das áreas sombreadas na Figura 7.8. Comparando (7.30) com (7.28), e tendo em conta que  $\text{erfc}$  é uma função decrescente, concluímos que a probabilidade de erro é menor no caso da sinalização antipodal. Com efeito, embora a energia por bit seja a mesma, neste caso a distância entre os sinais é maior do que na sinalização ortogonal.

## 7.4 Filtro Adaptado

Nesta secção vamos estudar uma realização equivalente do receptor de mínima probabilidade de erro baseada no filtro adaptado. Este filtro é desenhado de modo a maximizar a razão entre a energia instantânea do sinal de saída no instante de amostragem  $T$  e a potência do ruído de saída.

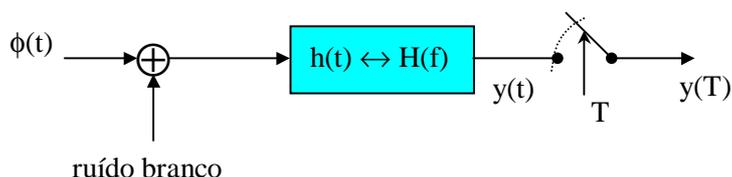


Figura 7.9: Receptor baseado no filtro adaptado

Suponhamos que a entrada do filtro representado na Figura 7.9 é a soma de um sinal conhecido  $\phi(t)$  com uma amostra  $w(t)$  de ruído branco gaussiano  $W(t)$  com densidade espectral de potência  $G_W(f) = \eta/2$ . A saída do filtro vem dada por

$$Y(t) = \phi_0(t) + N(t), \quad (7.31)$$

onde

$$\phi_0(t) = h * \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \Phi(f) e^{j2\pi ft} df \quad (7.32)$$

é a componente de sinal na saída, e o ruído  $N(t)$  tem espectro de potência

$$G_N(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2. \quad (7.33)$$

O objectivo é determinar a função de transferência  $H(f)$  (ou a resposta impulsional  $h(t)$ ) tal que a razão

$$\text{SNR} = \frac{|\phi_0(T)|^2}{P_N} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \Phi(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \quad (7.34)$$

seja máxima. Em (7.34),  $P_N$  é a potência média do ruído  $N(t)$ . Para resolver este problema, podemos recorrer à desigualdade de Shwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \Phi(f) e^{j2\pi f T} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(f) e^{j2\pi f T}|^2 df, \quad (7.35)$$

onde a igualdade se verifica quando

$$H_{\text{opt}}(f) = K \Phi^*(f) e^{-j2\pi f T}. \quad (7.36)$$

Substituindo (7.36) em (7.34), obtemos

$$\text{SNR}_{\text{opt}} = \frac{2E_{\phi}}{\eta}, \quad (7.37)$$

onde  $E_{\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(f)|^2 df$  é a energia do sinal  $\phi(t)$ . Note-se que  $\text{SNR}_{\text{opt}}$  não depende da constante arbitrária  $K$ , pelo que podemos escolher sem perda de generalidade  $K = 1$ . Então, de (7.36) tira-se que

$$h_{\text{opt}}(t) = \phi(T - t). \quad (7.38)$$

No caso em que o ruído de canal é branco, a resposta impulsional do filtro adaptado é uma réplica do sinal  $\phi(t)$ , atrasada de  $T$ , e definida no sentido reverso do tempo. Na Figura 7.10 exemplifica-se este facto.

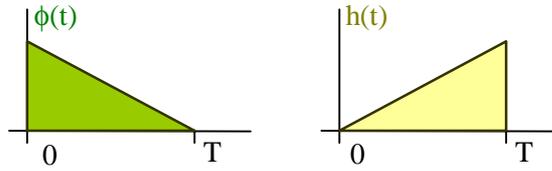


Figura 7.10: Resposta impulsional do filtro adaptado ao sinal  $\phi(t)$

Para concluir, podemos usar (7.38) para verificar que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\text{opt}}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \phi(T - t + \tau) d\tau, \quad (7.39)$$

onde  $x(t)$  é uma amostra do processo de entrada

$$X(t) = \phi(t) + W(t).$$

Como  $\phi(t) = 0, t \notin [0, T]$ , então (7.39) toma a forma

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) \phi(T - t + \tau) d\tau$$

e, portanto,

$$y(T) = \int_0^T x(\tau) \phi(\tau) d\tau. \quad (7.40)$$

Daqui se conclui que o sistema da Figura 7.9 é, em termos funcionais, equivalente a qualquer dos correladores da Figura 7.2-(a). Assim o banco de correladores ali representado é equivalente a um banco de filtros adaptados como se ilustra na Figura 7.11. Como se vê, cada filtro é adaptado a um dos sinais da base ortonormada que gera o espaço de sinal.

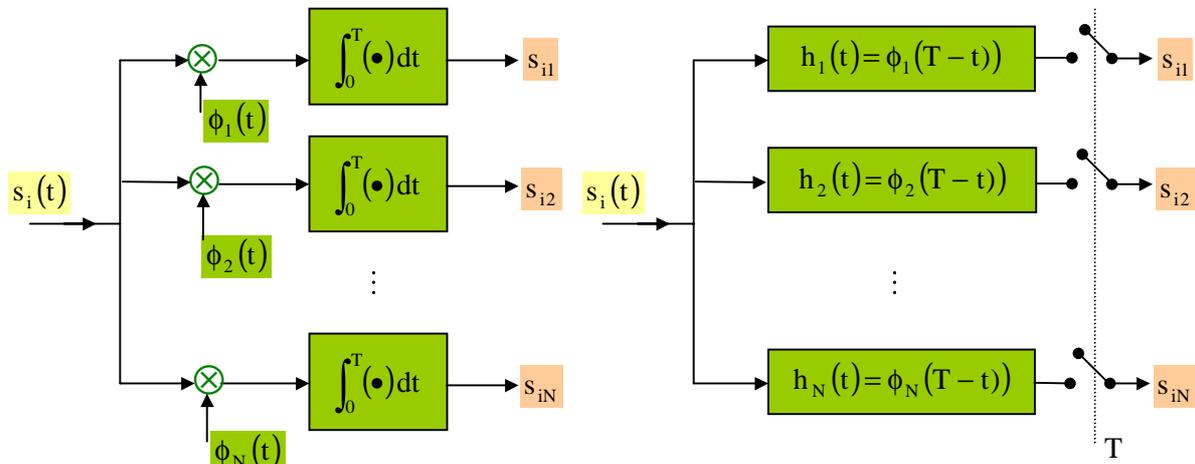


Figura 7.11: Equivalência entre um banco de correladores e um banco de filtros adaptados

## 7.5 Estimação de Máxima Verossimilhança em Ruído Branco Gaussiano

Nesta secção faremos uma introdução à teoria da estimação, tratando uma classe de problemas particular com aplicação em telecomunicações. Começemos por considerar o seguinte problema.

### Estimação de parâmetros

Dada a observação

$$x(t) = s(t; \theta) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.41)$$

onde  $s(t; \theta)$  representa um sinal conhecido a menos de um conjunto de parâmetros colecionados no vector  $\theta$ , e  $w(t)$  é uma amostra de  $W(t)$  que se assume ser ruído branco gaussiano com espectro de potência  $G_w(f) = \eta/2$ , pretende-se determinar a estimativa  $\hat{\theta}$  do vector  $\theta$ .

A Figura 7.12 ilustra o problema da estimação de parâmetros. A fonte gera um sinal  $s(t)$  que se assume aqui ser conhecido pelo receptor a menos de um vector de parâmetros  $\theta$ , o qual pertence a um conjunto designado por espaço de parâmetros. Através de um qualquer mecanismo de transição imposto pelo canal de transmissão, o sinal  $x(t)$  observado é uma versão ruidosa e, eventualmente distorcida, do sinal  $s(t)$ .

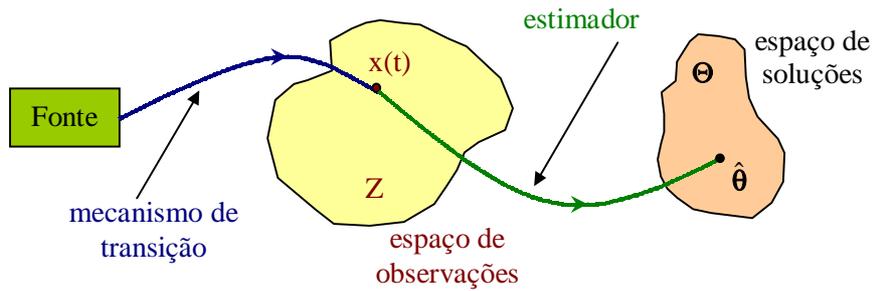


Figura 7.12: Problema da estimação de parâmetros

Suponhamos que o mecanismo de transição do canal é modelizado pela relação (7.41). Ao estimador compete, a partir do sinal observado  $x(t)$  e mediante determinadas hipóteses, encontrar no espaço de soluções (coincidente com o espaço de parâmetros), o vector desejado  $\theta$ . Naturalmente que o algoritmo que permite calcular a estimativa  $\hat{\theta}$  não é arbitrário. Ao contrário, executa uma regra de estimação que deve satisfazer um determinado critério de optimalidade. A escolha deste critério depende do grau de conhecimento apriori disponível sobre o vector de parâmetros a estimar. Podemos assim considerar **dois tipos de abordagem** do problema da estimação de parâmetros:

- A1.** estimação de parâmetros aleatórios;
- A2.** estimação de parâmetros determinísticos.

No estudo que a seguir apresentamos, vamos considerar apenas a classe de problemas A2. Neste caso, a estimativa do vector  $\theta$  pode obter-se por maximização da chamada **função de verosimilhança** que introduziremos de seguida. Por ser mais simples, começaremos por abordar o problema partindo de uma formulação em tempo discreto.

### 7.5.1 Formulação em Tempo Discreto

Neste caso, as observações definidas em (7.41) são escritas na forma

$$x_k = s_k(\theta) + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (7.42)$$

onde  $w_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ , é uma sequência branca gaussiana de média nula e variância  $\eta/2$ , ou seja,

$$f_{w_k}(w_k) = (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{w_k^2}{\eta}\right), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (7.43)$$

é a densidade de probabilidade da variável aleatória  $W_k$ , cuja amostra é  $w_k$ . Podemos então escrever

$$f_{x_k|\theta}(x_k) = (\pi\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{[x_k - s_k(\theta)]^2}{\eta}\right), \quad k = 0, 1, \dots, K-1. \quad (7.44)$$

Uma vez que as variáveis aleatórias  $W_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ , são estatisticamente independentes, o mesmo acontece com  $X_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ . Definindo o vector (coluna) de amostras  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{K-1}]^T$ , concluímos que a densidade de probabilidade conjunta das observações  $X_0, X_1, \dots, X_{K-1}$  é o produto das marginais (7.44).

**Def. 7.1- Função de verosimilhança.** A função de verosimilhança das amostras (vector  $\mathbf{x}$ ) e do vector de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  a estimar é dada pela densidade de probabilidade conjunta das observações condicionadas em  $\boldsymbol{\theta}$ . Sendo

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = [s_0(\boldsymbol{\theta}), s_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, s_{K-1}(\boldsymbol{\theta})]^T,$$

então

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) &= (\pi\eta)^{-K/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{K-1} [x_k - s_k(\boldsymbol{\theta})]^2\right) \\ &= (\pi\eta)^{-K/2} \exp\left(-\frac{1}{\eta} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|^2\right) \end{aligned} \quad (7.45)$$

No caso presente, em que a função de verosimilhança é do tipo gaussiano, podemos em alternativa a (7.45) usar a chamada **função logarítmica de verosimilhança**

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \ln \Lambda(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) &= -\frac{K}{2} \ln(\pi\eta) - \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{K-1} [x_k - s_k(\boldsymbol{\theta})]^2 \\ &= -\frac{K}{2} \ln(\pi\eta) - \frac{1}{\eta} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \end{aligned} \quad (7.46)$$

**Def. 7.2- Estimativa de máxima verosimilhança.** A estimativa de máxima verosimilhança do vector de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  é o vector

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}(\mathbf{x}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \Lambda(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}). \quad (7.47)$$

**Comentário:** a estimativa de máxima verosimilhança depende explicitamente dos dados  $\mathbf{x}$  que são amostras de observações aleatórias. Portanto o vector  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}(\mathbf{x})$  é ele próprio um vector aleatório.

Usando (7.46) em (7.47), e eliminando as parcelas que não dependem explicitamente dos parâmetros a estimar, podemos finalmente escrever

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}(\mathbf{x}) &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left( -\frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{K-1} [x_k - s_k(\boldsymbol{\theta})]^2 \right) \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left( -\frac{1}{\eta} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \right) \end{aligned} \quad (7.48)$$

A determinação de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}$  passa portanto por resolver um problema de cálculo de extremos, por exemplo, aplicando a condição necessária de existência desses extremos. Se existirem, os extremos verificam o sistema de equações

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left( -\frac{1}{\eta} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \right)_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}} = \mathbf{0}, \quad (7.49)$$

onde  $\mathbf{0}$  designa o vector nulo e  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}$  é o operador gradiente, isto é, o vector cujos elementos são as derivadas parciais em ordem a cada um dos elementos de  $\boldsymbol{\theta}$ . As soluções da equação (7.49) não são em geral únicas, sendo necessário determinar as que constituem de facto maximizantes e, destas, isolar aquela que conduz ao máximo global. Uma alternativa a este método pode basear-se numa técnica de busca, o que passa por calcular a função de verosimilhança para todos os valores de  $\boldsymbol{\theta}$  no espaço de soluções. Naturalmente, esta técnica pode conduzir a tempos de cálculo inoportunos.

**Exemplo 7.1: Estimação de amplitude.** Consideremos o caso em que

$$s_k(\mathbf{a}) = a s_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \Leftrightarrow \mathbf{s}(\mathbf{a}) = a \mathbf{s}$$

onde a amplitude  $a$  é o parâmetro que se pretende estimar. De (7.49) vem, então,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{1}{\eta} \|\mathbf{x} - a\mathbf{s}\|^2 \right)_{a=\hat{a}_{mv}} = 0,$$

equação com solução única

$$\hat{a}_{mv} = \frac{1}{E} \mathbf{x}^T \mathbf{s} = \frac{1}{E} \sum_{k=0}^{K-1} x_k s_k \quad (7.50)$$

onde  $E = \|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} s_k^2$  é a energia do sinal  $s_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ . Pode verificar-se que a solução anterior constitui de facto um máximo pois a segunda derivada da função de verosimilhança naquele ponto é negativa. Por outro lado, se não existisse ruído,  $\forall k: x_k = a s_k$ , e de (7.50) resultaria  $\hat{a}_{mv} = a$ , como seria de esperar.

### 7.5.1.1 Análise de Desempenho

Em discussão anterior concluímos que a estimativa de máxima verosimilhança é uma quantidade aleatória. Faz, portanto, todo o sentido investigar as propriedades estatísticas do erro de estimação

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mv} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}. \quad (7.51)$$

**Def. 7.3- Estimador não enviesado.** O estimador é não enviesado sse

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}_{mv}\} = \mathbf{0} \Leftrightarrow E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{mv}\} = \boldsymbol{\theta}. \quad (7.52)$$

Portanto, se o estimador for não enviesado, a estimativa é em média igual ao valor nominal do(s) parâmetro(s). Esta informação, sendo útil, não é no entanto suficiente como medida de qualidade do estimador, pois para conjuntos de observações diferentes nada diz sobre a dispersão dos erros de estimação obtidos. Como se sabe, esta medida de dispersão pode ser quantificada com uma análise de segunda ordem.

**Def. 7.4- Matriz de Fisher.** Seja  $N$  a dimensão do vector de parâmetros  $\theta$ . Os elementos da matriz de Fisher  $\mathbf{J}$  são dados por

$$[\mathbf{J}]_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (7.53)$$

Uma vez definida a matriz de Fisher, podemos enunciar o seguinte facto que aqui não demonstraremos.

**Facto 7.1: Limiar de Cramér-Rao.** Suponhamos que se verifica a condição (7.52) e que  $[\mathbf{J}]^{ii} = [\mathbf{J}^{-1}]_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da inversa da matriz de Fisher. Seja  $\sigma_i^2 = \text{var}(\{\epsilon_{mv}\}_i)$  a variância do erro de estimação do parâmetro  $\theta_i$ . Então

$$[\mathbf{J}]^{ii} \leq \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.54)$$

onde cada um dos  $[\mathbf{J}]^{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , é designado por limiar de Cramér-Rao.

Este facto mostra que existe um valor teórico limite abaixo do qual a variância do erro de uma estimativa não enviesada não pode cair.

**Def. 7.5- Estimativas eficientes.** Uma estimativa não enviesada é dita eficiente se (7.54) se verificar pela igualdade, isto é, quando a variância do erro atinge o valor limite estabelecido pelo limiar de Cramér-Rao.

**Exemplo 7.1 (continuação).** Sendo  $\mathbf{x} = a\mathbf{s} + \mathbf{w}$  e  $\hat{a}_{mv} = \mathbf{x}^T \mathbf{s} / E$ , onde  $E = \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ , de (7.51) vem

$$\epsilon_{mv} = a - \frac{1}{E} (\mathbf{a}\mathbf{s}^T + \mathbf{w}^T) \mathbf{s} = -\frac{1}{E} \mathbf{w}^T \mathbf{s} \quad (7.55)$$

e, portanto

$$E\{\epsilon_{mv}\} = 0, \quad (7.56)$$

pois  $E$  e  $\mathbf{s}$  são quantidades determinísticas e o vector de ruído  $\mathbf{w}$  tem média nula. Portanto, **a estimativa de máxima verosimilhança da amplitude é não enviesada.** Particularizando (7.46)

$$L(\mathbf{x}; a) = -\frac{K}{2} \ln(\pi\eta) - \frac{1}{\eta} \|\mathbf{x} - a\mathbf{s}\|^2,$$

de (7.53), e tendo em conta o Facto 7.1, obtemos o limiar de Cramér-Rao

$$\text{LCR} = \left[ \frac{1}{\eta} E \left\{ \frac{\partial^2 \|\mathbf{x} - a\mathbf{s}\|^2}{\partial a^2} \right\} \right]^{-1} = \frac{\eta/2}{E}. \quad (7.57)$$

Por outro lado, de (7.55) e (7.56), e recordando ainda que as amostras de ruído são estatisticamente independentes e têm igual variância  $\eta/2$ , tiramos

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon}^2 &= E\left\{\left[-\frac{1}{E}\mathbf{w}^T\mathbf{s}\right]^2\right\} = \frac{1}{E^2}\mathbf{s}^T E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\}\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{E^2}\mathbf{s}^T\left[\frac{\eta}{2}\mathbf{I}_K\right]\mathbf{s} = \frac{\eta/2}{E}\end{aligned}$$

o que, de acordo com a Def. 7.5, mostra que **a estimativa é eficiente**.

## 7.5.2 Formulação em Tempo Contínuo

Dadas as observações definidas pelo modelo (7.41), temos

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{mv}}(\mathbf{x}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left( -\frac{1}{\eta} \int_0^T [x(t) - s(t; \boldsymbol{\theta})]^2 dt \right), \quad (7.58)$$

o que constitui uma generalização imediata de (7.48). A solução pode ser obtida recorrendo à metodologia dual da expressa em (7.49),

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left( -\frac{1}{\eta} \int_0^T [x(t) - s(t; \boldsymbol{\theta})]^2 dt \right)_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{mv}}} = \mathbf{0}, \quad (7.59)$$

ou ainda usando um método de busca exaustivo.

No que diz respeito à análise de desempenho, a discussão apresentada no parágrafo 7.5.1.1 pode ser directamente transportada para o presente contexto, tendo em atenção a dualidade de (7.58) e (7.59) relativamente a (7.48) e (7.49), respectivamente.

**Exemplo 7.2: Estimação da fase de uma portadora sinusoidal.** Consideremos o modelo de observações

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde se mantêm as hipóteses formuladas no início da secção 7.5. Aqui

$$s(t; \theta) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f_c T = n (\gg 1) \in \mathbb{Z}^+ \quad (7.60)$$

e  $\theta \in [-\pi, +\pi]$  é o parâmetro a estimar. Estamos portanto a assumir que  $\theta$  se mantém constante durante o intervalo de observação de duração  $T$ . Usando (7.59), e tendo em conta que

$$f_c T = n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \int_0^T \cos(2\pi f_c t + \theta) \sin(2\pi f_c t + \theta) dt = 0,$$

obtemos

$$\int_0^T x(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\theta}_{mv}) dt = 0. \quad (7.61)$$

Definindo

$$\begin{aligned} x_I &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \cos(2\pi f_c t) dt \\ x_Q &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \sin(2\pi f_c t) dt \end{aligned}$$

então (7.61) é equivalente a

$$\sin(\hat{\theta}_{mv}) x_I - \cos(\hat{\theta}_{mv}) x_Q = 0$$

e, portanto,

$$\hat{\theta}_{mv} = \text{atan}\left(\frac{x_Q}{x_I}\right). \quad (7.62)$$

A Figura 7.13 ilustra o diagrama de blocos do sistema que implementa o estimador MV da fase da portadora sinusoidal definida em (7.60).

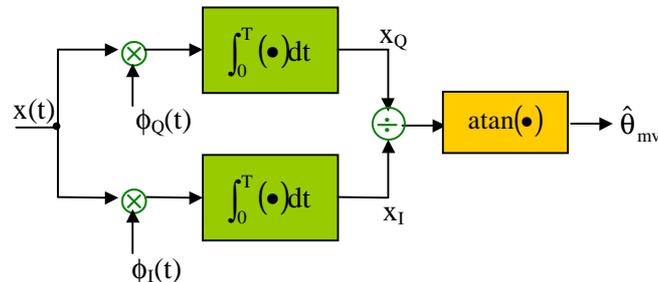


Figura 7.13: Estimador MV da fase de uma portadora sinusoidal

A partir das hipóteses formuladas podemos concluir que as variáveis aleatórias

$$\begin{aligned} X_I &= \sqrt{E} \cos \theta + W_I \\ X_Q &= \sqrt{E} \sin \theta + W_Q \end{aligned}$$

são gaussianas, independentes, e têm densidade de probabilidade conjunta

$$f(x_I, x_Q) = (\eta\pi)^{-1} \exp\left(-\frac{(x_I - \sqrt{E} \cos \theta)^2 + (x_Q - \sqrt{E} \sin \theta)^2}{\eta}\right).$$

Usando a transformação, sugerida pela Figura 7.13,

$$\begin{aligned} X_I &= R \cos \hat{\theta}_{mv} \\ X_Q &= R \sin \hat{\theta}_{mv} \end{aligned}$$

podemos então calcular a densidade de probabilidade conjunta de R e de  $\hat{\theta}_{mv}$

$$f(R, \hat{\theta}_{mv}) = \frac{R}{\eta\pi} \exp\left(-\frac{(R \cos \hat{\theta}_{mv} - \sqrt{E} \cos \theta)^2 + (R \sin \hat{\theta}_{mv} - \sqrt{E} \sin \theta)^2}{\eta}\right),$$

a qual, após alguma manipulação algébrica, se pode escrever na forma

$$f(R, \hat{\theta}_{mv}) = \frac{e^{-\gamma^2 \sin^2(\theta - \hat{\theta}_{mv})}}{\eta\pi} R \exp\left(-\frac{(R - \sqrt{E} \cos(\theta - \hat{\theta}_{mv}))^2}{\eta}\right),$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{\eta}} \quad (7.63)$$

fornece uma medida da **SNR**. Uma vez que  $\epsilon_{mv} = \theta - \hat{\theta}_{mv}$ , então a densidade de probabilidade do erro é dada por

$$f(\epsilon_{mv}) = \frac{e^{-\gamma^2 \sin^2 \epsilon_{mv}}}{\eta\pi} \int_0^{+\infty} R \exp\left(-\eta^{-1}(R - \sqrt{E} \cos \epsilon_{mv})^2\right) dR$$

ou, fazendo a mudança de variável  $x = \sqrt{2/\eta}(R - \sqrt{E} \cos \epsilon_{mv})$ ,

$$f(\epsilon_{mv}) = \frac{e^{-\gamma^2 \sin^2 \epsilon_{mv}}}{2\pi} \int_{-\sqrt{2}\gamma \cos \epsilon_{mv}}^{+\infty} (x + \sqrt{2}\gamma \cos \epsilon_{mv}) e^{-x^2/2} dx.$$

O factor integral pode ainda ser trabalhado, obtendo-se

$$f(\epsilon_{mv}) = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\pi} + \frac{e^{-\gamma^2 \sin^2 \epsilon_{mv}}}{\sqrt{\pi}} \gamma \cos \epsilon_{mv} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2}\gamma \cos \epsilon_{mv}}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \quad (7.64)$$

Para analisar este resultado vamos considerar as duas situações limite: ruído forte e ruído fraco.

### Ruído forte ( $\gamma \rightarrow 0$ )

Neste caso, a segunda parcela em (7.64) anula-se, pelo que

$$f(\epsilon_{mv}) \xrightarrow{\gamma \ll 1} \frac{1}{2\pi}, \quad \epsilon_{mv} \in [-\pi, +\pi].$$

Isto significa que a estimativa toma com igual probabilidade valores em intervalos próximos ou afastados do valor nominal  $\theta$ , o que corresponde a um mau desempenho do estimador.

### Ruído fraco ( $\gamma \rightarrow \infty$ )

Nestas condições podemos assumir que, com probabilidade muito grande, a estimativa  $\hat{\theta}_{mv}$  não se afasta de  $\theta$  mais do que  $\pi/2$  em valor absoluto. Tal implica que  $\cos \epsilon_{mv} \geq 0$ , e (7.64) rescreve-se do seguinte modo

$$f(\epsilon_{mv}) = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\pi} + \frac{e^{-\gamma^2 \sin^2 \epsilon_{mv}}}{\sqrt{\pi}} \gamma \cos \epsilon_{mv} \left[ 1 - \operatorname{erfc}_* \left( \sqrt{2} \gamma \cos \epsilon_{mv} \right) \right],$$

onde

$$\operatorname{erfc}_*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du \xrightarrow{x \gg 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2}.$$

Usando este limite para o caso em que  $\gamma \gg 1$ , obtém-se finalmente

$$f(\epsilon_{mv}) \xrightarrow{\gamma \gg 1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma \cos \epsilon_{mv} e^{-\gamma^2 \sin^2 \epsilon_{mv}}. \quad (7.65)$$

Começemos por notar que a função limite indicada em (7.65) é uma função par o que implica que o **estimador é assintoticamente não enviesado**, isto é, o valor expectável do erro tende para zero quando  $\gamma$  cresce. Por outro, para valores do erro próximos do seu valor médio assintótico, ou seja, se  $\epsilon_{mv} \approx 0 \Rightarrow \cos \epsilon_{mv} \approx 1, \sin \epsilon_{mv} \approx \epsilon_{mv}$  e (7.65) é aproximada por uma gaussiana de média nula e variância  $1/2\gamma^2 = \eta/2E$ . Se calcularmos o LCR deste estimador de fase obtemos exactamente este resultado. Portanto, podemos também afirmar que o **estimador MV da fase é assintoticamente eficiente**.

### Malha de Seguimento de Fase <sup>2</sup>

Voltemos à condição (7.61) e usemos a definição do sinal  $x(t)$

$$\int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta) \sin(2\pi f_c t + \hat{\theta}_{mv}) dt + \int_0^T w(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\theta}_{mv}) dt = 0$$

o que é equivalente a

$$\sin \epsilon_{mv} + \Delta = 0,$$

onde  $\Delta$  corresponde a uma média temporal de uma amostra de ruído. Na hipótese de ruído fraco,  $\Delta$  toma com elevada probabilidade valores pequenos e pode ser interpretado como uma pequena perturbação da medida do erro de fase  $\sin \epsilon_{mv}$ . Por outro lado, vimos na análise de desempenho feita anteriormente que na hipótese de ruído fraco, o erro toma com elevada

<sup>2</sup> Malha de seguimento de fase: PLL (Phase Locked Loop)

probabilidade valores  $\epsilon_{mv} \approx 0$ , logo  $\sin \epsilon_{mv} \approx \epsilon_{mv}$ , e o erro de estimação deve verificar a condição aproximada

$$\epsilon_{mv} + \Delta \approx 0. \quad (7.66)$$

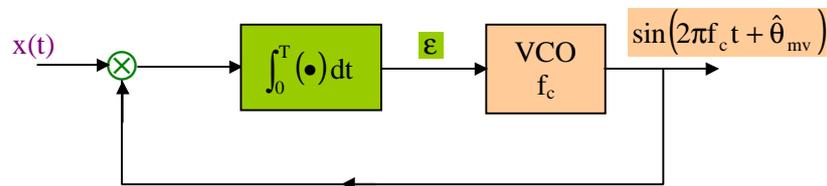


Figura 7.14: Malha de seguimento de fase

A Figura 7.14 mostra o diagrama de blocos para uma implementação alternativa do estimador de fase. Se na saída do integrador o erro  $\epsilon_{mv} = 0$ , então a saída do VCO mantém-se estabilizada com  $\hat{\theta}_{mv} = \theta$ . Se o efeito da perturbação  $\Delta$  se fizer sentir, por exemplo, aumentando ligeiramente o erro, então o VCO reflecte esta variação num ligeiro aumento de  $\hat{\theta}_{mv}$  o que vai, naturalmente contribuir para um decréscimo do novo valor de erro. Portanto, estando a funcionar perto do regime permanente onde o erro é muito pequeno, o PLL é capaz de reagir a pequenas perturbações no sentido de voltar ao ponto de equilíbrio. A partir da observação ruidosa de uma portadora sinusoidal é assim possível gerar localmente uma réplica com sincronismo de fase (a menos de um desvio constante de  $\pi/2$ , cuja compensação é muito simples de realizar).