Desempenho dos Sistemas PCM em Presença de Ruído de Canal

Consideremos um sistema de transmissão PCM que usa um código binário natural de comprimento ν. Devido à presença de ruído de canal existe sempre uma probabilidade não nula de ocorrerem erros de transmissão, i.e., trocas de bits. Para cada amostra $x_a(kT_a)$ do sinal original, o quantizador gera o símbolo $x_Q(kT_a)$, e é transmitida a palavra de código correspondente, i.e., o vector binário $\mathbf{x}_k$ de comprimento ν. Na ausência de ruído, o receptor reconstruiria o vector $\mathbf{x}_k$ sem erros. No entanto, no caso geral obtém-se

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{n_k}, \qquad (6a.1)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n_k}$ é o vector de erro, i.e., um vector binário de comprimento ν com "1" nas posições onde ocorrem os erros de transmissão (troca de bits) e "0" nas restantes. Na saída do descodificador obtém-se

$$y(kT_a) = x_Q(kT_a) + \varepsilon_n(kT_a)$$

ou, tendo em conta (4.10),

$$y(kT_a) = x(kT_a) + e(kT_a) + \varepsilon_n(kT_a), \qquad (6a.2)$$

onde $e(kT_a)$ é o erro de quantização e

$$\varepsilon_n(kT_a) = \Delta \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_{n_{kj}} 2^{j-1} \qquad (6a.3)$$

é o erro resultante dos erros de transmissão. A saída do filtro de reconstrução, quando a entrada é dada por (6a.2) é então

$$y(t) = x(t) + e(t) + \varepsilon_n(t), \qquad (6a.4)$$

onde $x(t)$ é o sinal original, $e(t)$ é o ruído de quantização e $\varepsilon_n(t)$ é o termo residual de ruído resultante dos erros de transmissão provocados pelo ruído de canal.

A relação sinal - ruído de saída do receptor PCM é definida por

$$SNR_D = \frac{\mathbf{P}_x}{\mathbf{P}_e + \mathbf{P}_n}, \qquad (6a.5)$$

onde $\mathbf{P}_x$ é a potência do sinal original, $\mathbf{P}_e$ é a potência do ruído de quantização, e $\mathbf{P}_n$ é a potência do ruído residual. Com base num raciocínio semelhante ao que foi usado no capítulo 4 para calcular a potência do ruído de quantização, pode concluir-se que a potência do ruído residual é aproximada por

$$\mathbf{P}_n \approx E\left\{\varepsilon_n^2(kT_a)\right\} = \Delta^2 E\left\{\left(\sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_{n_{kj}} 2^{j-1}\right)^2\right\}$$

$$= \Delta^2 \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E\left\{\varepsilon_{n_{kj}} \varepsilon_{n_{ki}}\right\} 4^{j-1}.$$

Seja P_e a probabilidade de ocorrer um erro de transmissão e vamos supor que estes erros são independentes. Então, o vector $\boldsymbol{\varepsilon}_{n_k}$ é constituído por símbolos binários "1" e "0" estatisticamente independentes e com probabilidades de ocorrência P_e e $1-P_e$, respectivamente. Assim sendo,

$$E\left\{\varepsilon_{n_{kj}}\varepsilon_{n_{ki}}\right\}=\begin{cases}1^2\times P_e+0^2\times(1-P_e)=P_e\ , & j=i\\ 1\times 1\times P_e^2+2\times 1\times 0\times P_e(1-P_e)+0\times 0\times(1-P_e)^2=P_e^2\ , & j\neq i\end{cases}$$

Admitindo que $P_e \ll 1$, então os termos em P_e^2 podem ser desprezados, obtendo-se

$$\mathbf{P}_n \approx \Delta^2 P_e \sum_{j=1}^{\nu} 4^{j-1} = \Delta^2 P_e \frac{4^{\nu}-1}{3}\ . \tag{6a.6}$$

Tendo em conta (4.17) e (6a.6), de (6a.5) resulta

$$\mathrm{SNR}_D = \frac{12\mathbf{P}_x}{\Delta^2}\left[1+4P_e\left(4^{\nu}-1\right)\right]^{-1}. \tag{6a.7}$$