6 Desempenho dos Sistemas de Transmissão Analógicos na Presença de Ruído

Neste capítulo estudaremos o desempenho dos sistemas de transmissão analógicos na presença do ruído de canal. Consideraremos em particular os sistemas de transmissão em banda de base, e com modulação de portadoras sinusoidais em amplitude (AM[1]) e em frequência (FM[2]). Nestes casos, AM e FM, o canal de transmissão é do tipo passa-banda, pelo que começaremos por estudar o modelo de ruído mais adequado para estudar estes sistemas.

6.1 Ruído Passa-Banda

Como sabemos, as técnicas de modulação de portadoras sinusoidais conduzem a sinais do tipo passa-banda cujo espectro é centrado na frequência nominal da portadora. Tendo em conta que o canal introduz ruído aditivo com largura de banda muito superior à largura de banda de transmissão, será natural impor que o primeiro bloco do receptor execute uma operação de filtragem das componentes espectrais do ruído (e de outras interferências) que estejam fora da banda de transmissão. Assim sendo, a arquitectura básica de um sistema de transmissão por modulação de portadoras sinusoidais é a que se mostra no diagrama de blocos da Figura 6.1, onde $W(t)$ é um processo branco e gaussiano com espectro de potência

$$G_W(f)=\frac{\eta}{2}. \tag{6.1}$$

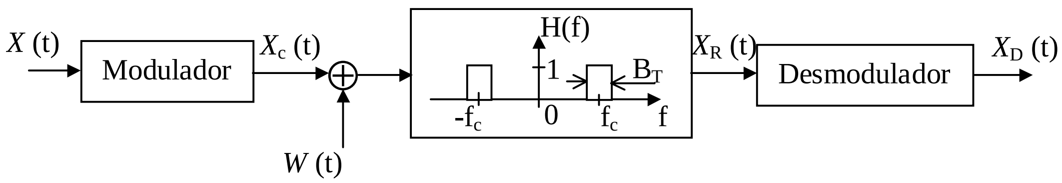

Figura 6.1: Arquitectura básica de um sistema de transmissão por modulação de portadoras sinusoidais

Deste modo, o sinal à entrada do desmodulador é

$$X_R(t)=X_c(t)+N(t), \tag{6.2}$$

onde $X_c(t)$ é o sinal transmitido (portadora modulada) e $N(t)$ é um processo passa-banda resultante da filtragem do ruído branco $W(t)$. Como hipótese simplificativa que não interfere directamente com o assunto que iremos abordar, admitimos que o canal de transmissão é ideal. A partir de (6.1) e usando a função de transferência $H(f)$ definida na Figura 6.1, verificamos que o espectro de potência do ruído passa-banda é o que está representado na Figura 6.2. Como neste tipo de sistemas se verifica sempre a desigualdade $f_c >> B_T$, o processo passa-banda $N(t)$ é ainda designado por processo de banda estreita. De (6.2) concluímos que à entrada do desmodulador a componente de sinal tem uma potência

[1] AM – Amplitude Modulation
[2] FM – Frequency Modulation

$\mathbf{P}_R = \mathbf{P}_T$, onde $\mathbf{P}_T$ é a potência transmitida a qual, na forma, depende do tipo de modulação que se considerar.

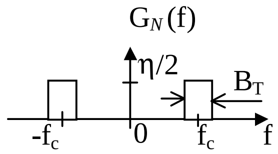

Figura 6.2: Espectro de potência do ruído passa-banda

A partir da Figura 6.2, vemos que a potência da componente de ruído vale

$$\mathbf{P}_N = \eta B_T. \tag{6.3}$$

Portanto, a relação sinal – ruído de recepção $(SNR_R)^3$ vale

$$SNR_R = \frac{\mathbf{P}_R}{\eta B_T}. \tag{6.4}$$

6.1.1 Componentes em Quadratura do Ruído Passa-Banda

A Figura 6.3 apresenta uma possível amostra $n(t)$ do processo passa-banda $N(t)$, a qual é sugestiva quanto à forma da expressão adequada para modelar temporalmente o processo passa-banda.

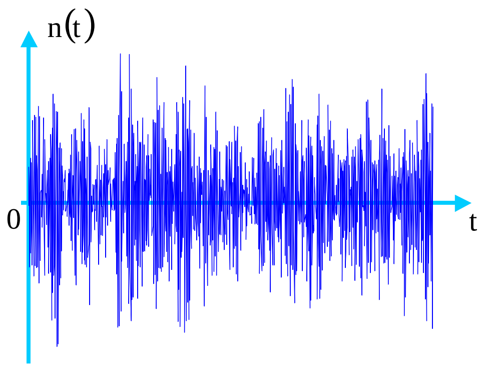

Figura 6.3: Função amostra do ruído passa-banda

Assumiremos então que o processo de banda estreita $N(t)$ é descrito pelo modelo

$$N(t) = A_N(t)\cos(2\pi f_c t + \Phi_N(t)), \tag{6.5}$$

onde $A_N(t)$ e $\Phi_N(t)$ representam a envolvente e a fase, respectivamente. A expressão (6.5) pode também escrever-se na forma

---

3 SNR_R – Signal to Noise Ratio $_{Reception}$

$$N(t) = N_I(t)\cos(2\pi f_c t) - N_Q(t)\sin(2\pi f_c t), \qquad (6.6)$$

onde $N_I(t)$ e $N_Q(t)$ identificam a componente em fase e a componente em quadratura, respectivamente. Genericamente, os processos $N_I(t)$ e $N_Q(t)$ são designados por componentes em quadratura de $N(t)$. Obviamente,

$$\begin{aligned} N_I(t) &= A_N(t)\cos(\Phi_N(t)) \\ N_Q(t) &= A_N(t)\sin(\Phi_N(t)) \end{aligned}. \qquad (6.7)$$

A Figura 6.4 mostra a representação do ruído passa-banda $N(t)$ no plano das componentes em quadratura, enquanto que a Figura 6.5 ilustra como as componentes em quadratura se podem obter a partir de $N(t)$ e a Figura 6.6 dá exemplos das respectivas amostras .

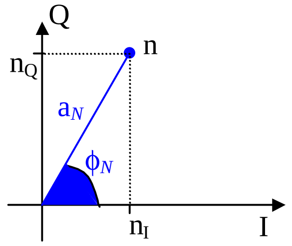

Figura 6.4: Representação do ruído passa-banda no plano das componentes em quadratura

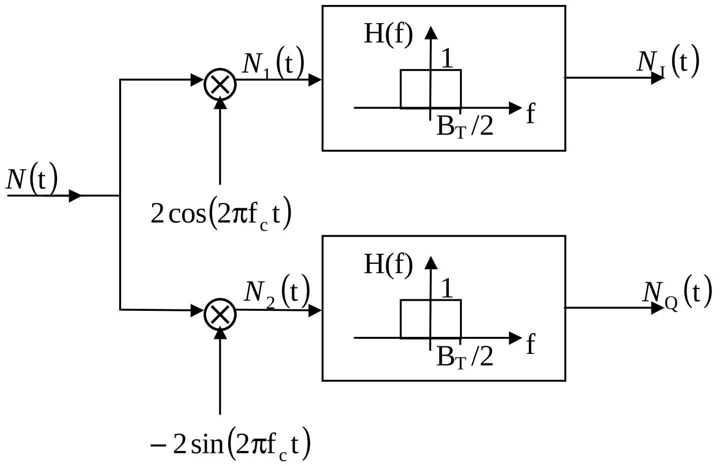

Figura 6.5: Geração das componentes em quadratura do ruído passa-banda

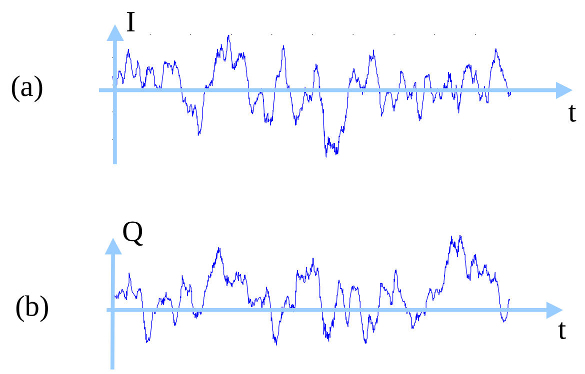

Figura 6.6: Amostras das componentes: (a) em fase e (b) em quadratura

6.1.2 Propriedades das Componentes em Quadratura

Embora não o façamos aqui pode mostrar-se o seguinte

Facto 6.1: O processo de banda estreita $N(t)$ é gaussiano e as respectivas componentes em fase $N_I(t)$ e em quadratura $N_Q(t)$ são conjuntamente gaussianas.

Do diagrama de blocos da Figura 6.5 conclui-se que os espectros de potência de $N_I(t)$ e de $N_Q(t)$ se obtêm ambos a partir de

$$G_{N_I}(f) = G_{N_Q}(f) = |H(f)|^2 \left[G_N(f + f_c) + G_N(f - f_c) \right],$$

ou seja,

$$G_{N_I}(f) = G_{N_Q}(f) = \eta \Pi\left(\frac{f}{B_T} \right), \tag{6.8}$$

como se mostra na Figura 6.7.

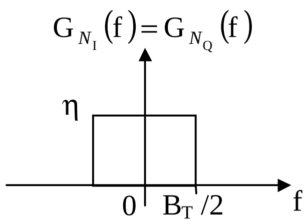

Figura 6.7: Espectro de potência das componentes em quadratura do ruído passa-banda

Como já vimos, a potência do ruído passa-banda vale $\mathbf{P}_N = \eta B_T$, ver eq. (6.3), pelo que, da observação da Figura 6.7, concluímos

$$\mathbf{P}_{N_I} = \mathbf{P}_{N_Q} = \mathbf{P}_N = \eta B_T, \tag{6.9}$$

isto é, a potência do ruído passa-banda é igual às potências das respectivas componentes em quadratura.

Consideremos os processos $N_1(t)$ e $N_2(t)$ indicados na Figura 6.5 e que se escrevem na forma

$$\begin{aligned} N_1(t) &= 2N(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta) \\ N_2(t) &= -2N(t)\sin(2\pi f_c t + \Theta) \end{aligned}, \tag{6.10}$$

onde Θ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-\pi, +\pi]$ e independente de $N(t)$[4]. Nestas condições, mostra-se facilmente a partir de (6.10) que a correlação cruzada entre $N_1(t)$ e $N_2(t)$ é

[4] Recorda-se que, de acordo com a notação que temos usado, $N(t)$ é a variável aleatória que modela a amplitude das amostras do processo $N(t)$.

$$\begin{aligned} R_{N_1N_2}(\tau) &= E_{N\Theta}\{N_1(t)N_2(t-\tau)\} \\ &= 2R_N(\tau)\sin(2\pi f_c\tau) \end{aligned}, \tag{6.11}$$

e, portanto,

$$G_{N_1N_2}(f) = j[G_N(f-f_c) - G_N(f+f_c)], \tag{6.12}$$

como se mostra na Figura 6.8. Por outro lado, pode verificar-se que

$$R_{N_IN_Q}(\tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u)h(v)R_{N_1N_2}(\tau+v-u)\,dudv\,, \tag{6.13}$$

onde $h(\cdot)$ representa a resposta impulsional dos filtros passa-baixo ideais da Figura 6.5. De (6.13), obtém-se

$$G_{N_IN_Q}(f) = |H(f)|^2 G_{N_1N_2}(f), \tag{6.14}$$

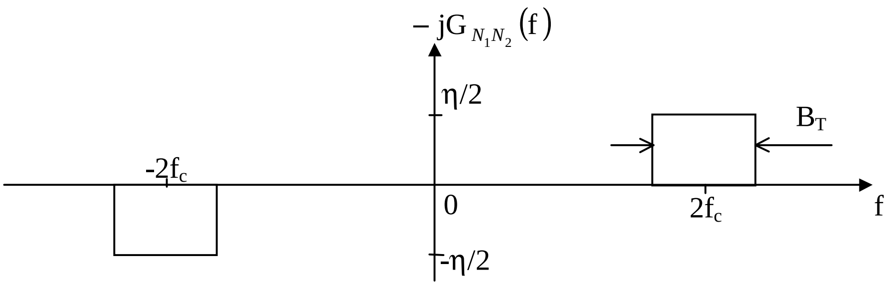

Figura 6.8: Espectro de potência cruzado entre $N_1(t)$ e $N_2(t)$

pelo que, sendo $H(f)$ a função de transferência de um filtro passa-baixo com largura de banda $B_T/2$, se conclui de imediato que $G_{N_IN_Q}(f) = 0,\ \forall f,$ e portanto

$$R_{N_IN_Q}(\tau) = 0,\ \forall\tau, \tag{6.15}$$

ou seja, as componentes em quadratura do ruído passa-banda são incorrelacionadas. Atendendo ao Facto 6.1, podemos ainda concluir que são também estatisticamente independentes. Os resultados aqui obtidos podem ser resumidos no seguinte

Facto 6.2: As componentes em fase e em quadratura do ruído passa-banda são processos conjuntamente estacionários cujos espectros de potência são definidos na eq. (6.8). Em cada instante, as respectivas amplitudes são conjuntamente gaussianas e independentes:

$$f_{N_IN_Q}(u,v) = \frac{1}{2\pi(\eta B_T)}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2(\eta B_T)}\right),\ (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{6.16}$$

6.1.3 Propriedades da Envolvente e da Fase

Usando as relações (6.7) como a transformação $g(\cdot,\cdot)$ que, em cada instante t, relaciona a envolvente e a fase do ruído passa-banda com as amplitudes das respectivas componentes em fase e em quadratura, isto é,

$$\begin{aligned} N_I &= A_N \cos\Phi_N \\ N_Q &= A_N \sin\Phi_N \end{aligned}, \tag{6.17}$$

é possível, fazendo uso de (6.16), caracterizar estatisticamente a envolvente e a fase. Com efeito, recorrendo a um resultado conhecido da teoria das variáveis aleatórias (ver Cap. 2, eq. (2.80)), podemos escrever

$$f_{A_N\Phi_N}(a,\phi) = f_{N_I N_Q}(a\cos\phi, a\sin\phi)\left|J_g\right|,$$

onde J_g é o Jacobeano da transformação $g(\cdot,\cdot)$ definida em (6.17). Assim, temos

$$f_{A_N\Phi_N}(a,\phi) = \frac{a}{2\pi(\eta B_T)}\exp\left(-\frac{a^2}{2(\eta B_T)}\right),\ a \geq 0,\ \phi \in [-\pi,+\pi]. \tag{6.18}$$

Integrando (6.18) em a e em ϕ, obtemos as densidades de probabilidade marginais da fase e da envolvente, respectivamente. Verifica-se ainda que o produto destas densidades marginais iguala a densidade de probabilidade conjunta.

Facto 6.3: Em cada instante de tempo, a envolvente e a fase do ruído passa-banda são estatisticamente independentes e têm distribuições de Rayleigh e uniforme, respectivamente:

$$\begin{aligned} f_{A_N}(a) &= \frac{a}{\eta B_T}\exp\left(-\frac{a^2}{2\eta B_T}\right) & a \geq 0 \\ f_{\Phi_N}(\phi) &= \frac{1}{2\pi} & \phi \in [-\pi,+\pi] \end{aligned}. \tag{6.19}$$

Note-se que, multiplicando as densidades de probabilidade expressas em (6.19), se obtém (6.18), o que mostra que a envolvente e a fase são estatisticamente independentes.

6.2 Desempenho dos Sistemas de Transmissão em Banda de Base

No caso da transmissão em banda de base o sinal transmitido é a própria mensagem. Esta é suposta ser um sinal amostra de um processo estacionário $X(t)$ tal que:

M1. $m_X = 0$;

M2. G_X tem suporte no intervalo [-B,+B] e a potência é $\mathbf{P}_X$.

A Figura 6.9 dá exemplo de um possível espectro de potência da mensagem.

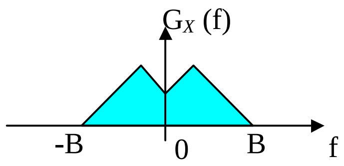

Figura 6.9: Espectro de potência da mensagem

A arquitectura representada na Figura 6.1 simplifica-se de acordo com o diagrama de blocos da Figura 6.10, onde

$$H_D(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right), \tag{6.20}$$

isto é, um filtro passa-baixo ideal de ganho unitário e com largura de banda igual à da mensagem.

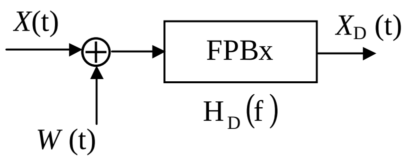

Figura 6.10: Arquitectura de um sistema de transmissão em banda de base

Temos então

$$X_D(t) = X(t) + N_D(t), \tag{6.21}$$

onde $N_D(t)$ é a componente de ruído que resulta da filtragem do ruído branco $W(t)$ pelo FPB_x da Figura 6.10.

O desempenho de um sistema de transmissão avalia-se pelo valor da relação sinal-ruído (SNR_D)[5] de saída que se define do seguinte modo:

Def. 6.1- O valor da SNR_D é dado por

$$SNR_D = \frac{\mathbf{P}_D}{\mathbf{P}_N},$$

onde

$\mathbf{P}_D$: potência de saída quando $W \equiv 0$

$\mathbf{P}_N$: potência de saída quando $X \equiv 0$.

Na ausência de ruído, $W(t) \equiv 0$, a saída (6.21) é apenas $X_D(t) = X(t)$, pelo que atendendo a **M2**, $\mathbf{P}_D = \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_R$, onde $\mathbf{P}_R$ é a potência da componente do sinal recebido que

[5] SNR_D – Signal to Noise Ratio $_{\text{Detection}}$

depende da mensagem. Quando não se transmite a mensagem, $X(t)\equiv 0$, a saída (6.21) só depende do ruído, $X_D(t)=N_D(t)$. Usando (6.1) e (6.20), obtemos

$$G_{N_D}(f)=\frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

e, portanto, a potência da componente de ruído na saída vale $\mathbf{P}_N=\eta B$. Então, fazendo uso da Def. 6.1, obtemos

$$\mathrm{SNR}_D=\frac{\mathbf{P}_R}{\eta B}=\gamma. \tag{6.22}$$

O parâmetro γ, definido em (6.22), representa a SNR_D de um sistema de transmissão analógico em banda de base. Iremos usá-lo como termo de comparação dos desempenhos dos restantes sistemas de transmissão.

6.3 Desempenho dos Sistemas AM

No caso dos sistemas de modulação de amplitude, o processo $X_c(t)$ da eq. (6.2) é dado por

$$X_c(t)=A_c\left[x_{dc}+X(t)\right]\cos(2\pi f_c t+\Theta), \tag{6.23}$$

onde o processo $X(t)$ representa a fonte e verifica as hipóteses M1 e M2 especificadas na secção 6.2 e na Figura 6.9, x_{dc} é uma constante, e Θ é uma variável aleatória independente de $X(t)$ com distribuição uniforme,

$$f_\Theta(\theta)=\frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right). \tag{6.24}$$

De acordo com estas condições, a autocorrelação do processo $X_c(t)$ é

$$R_{X_c}(\tau)=\frac{A_c^2}{2}\left[x_{dc}^2+R_X(\tau)\right]\cos(2\pi f_c\tau) \tag{6.25}$$

a que corresponde um espectro de potência

$$G_{X_c}(f)=\frac{A_c^2}{4}\left\{x_{dc}^2\left[\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right]+\left[G_X(f+f_c)+G_X(f-f_c)\right]\right\}, \tag{6.26}$$

ilustrado na Figura 6.11. A potência transmitida e a largura de banda de transmissão são respectivamente dadas por

$$\mathbf{P}_T=\frac{A_c^2}{2}\left(x_{dc}^2+\mathbf{P}_X\right) \tag{6.27}$$

e

$$B_T=2B. \tag{6.28}$$

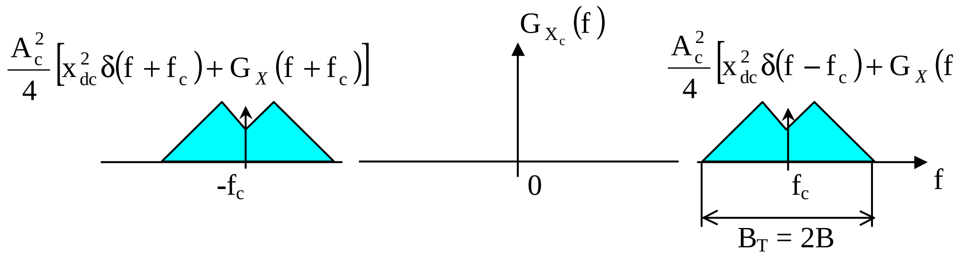

Figura 6.11: Espectro de potência do sinal de AM

Sem perda de generalidade, consideremos a seguinte função amostra do processo passa-banda $X_c(t)$

$$x_c(t)=A_c[x_{dc}+x(t)]\cos(2\pi f_c t), \tag{6.29}$$

a qual tem componentes em fase e em quadratura

$$\begin{aligned} x_{c_I}(t)&=A_c[x_{dc}+x(t)] \\ x_{c_Q}(t)&=0 \end{aligned} \tag{6.30}$$

como se mostra na Figura 6.12, onde se representa (6.29) no plano das componentes em quadratura. Como se vê, a fase é nula quando não existe sobremodulação (Figura 6.12-(a)); quando existe sobremodulação a fase dá saltos de $\pm\pi$ nos instantes t_0 em que $x_{dc}+x(t_0)$ cruza a origem.

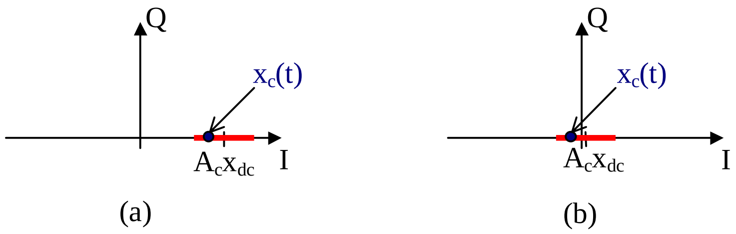

Figura 6.12: Sinal de AM no plano das componentes em quadratura: (a) sem sobremodulação; (b) com sobremodulação

Voltando à eq. (6.2) e à Figura 6.1, e tendo em conta (6.23), verificamos que o sinal à entrada do receptor é dado por

$$X_R(t)=A_c[x_{dc}+X(t)]\cos(2\pi f_c t+\Theta)+N(t), \tag{6.31}$$

onde $N(t)$ é o ruído passa-banda estudado na secção 6.1. Usando (6.9), (6.27) e (6.28), podemos escrever

$$\boxed{\mathrm{SNR}_R=\frac{\mathbf{P}_{X_c}}{\mathbf{P}_N}=\frac{\frac{A_c^2}{2}\left[x_{dc}^2+\mathbf{P}_X\right]}{\eta B_T}=\frac{\mathbf{P}_R}{2\eta B}}, \tag{6.32}$$

ou, usando (6.22),

$$\mathrm{SNR_R} = \frac{\gamma}{2}. \tag{6.33}$$

Concluímos assim que, para o mesmo canal (mesmo valor de η) e nas mesmas condições de recepção da componente de sinal (igual valor de $\mathbf{P}_R$), a SNR_R de um sinal de AM em banda lateral dupla vale metade da SNR_D de um sistema de transmissão em banda de base.

Considerando (6.29) e relembrando (6.6), podemos escrever as expressões de amostras das componentes em quadratura de $X_R(t)$:

$$\begin{aligned} x_{R_I}(t) &= A_c[x_{dc} + x(t)] + n_I(t) \\ x_{R_Q}(t) &= n_Q(t) \end{aligned} . \tag{6.34}$$

A Figura 6.13 mostra a representação de uma amostra do sinal à entrada do desmodulador no plano das componentes em quadratura.

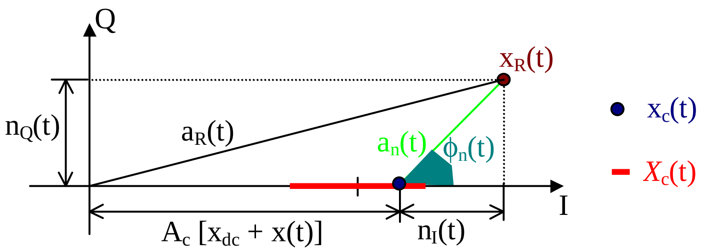

Figura 6.13: Sinal de AM + ruído passa-banda no plano das componentes em quadratura

6.3.1 Receptor Coerente

No caso do receptor coerente de AM, o desmodulador da Figura 6.1 tem a arquitectura definida pelo diagrama de blocos da Figura 6.14. Se compararmos com o diagrama de blocos da Figura 6.5, e recordarmos (6.28), concluímos de imediato que este receptor produz na saída a componente em fase da entrada subtraída da componente contínua.

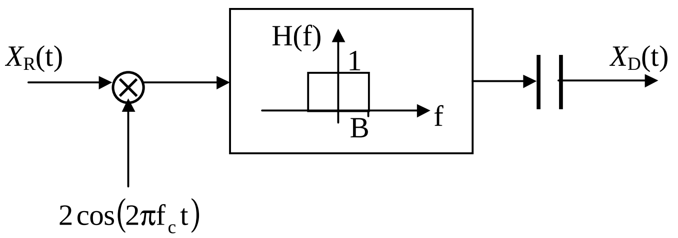

Figura 6.14: Receptor coerente

Então, recorrendo a (6.34),

$$X_D(t) = A_c X(t) + N_I(t). \tag{6.35}$$

Para calcular a SNR_D vamos usar a Def. 6.1. Usando (6.27) conjuntamente com a hipótese $\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_R$, (6.28) e (6.9), obtemos

$$\mathbf{P}_D = 2\mathbf{P}_R - (A_c x_{dc})^2$$
$$\mathbf{P}_N = 2\eta B \tag{6.36}$$

e, tendo em conta (6.22),

$$\mathrm{SNR}_D = \left(1 - \frac{(A_c x_{dc})^2/2}{\mathbf{P}_R}\right)\gamma. \tag{6.37}$$

Note-se que o factor

$$\zeta = 1 - \frac{(A_c x_{dc})^2/2}{\mathbf{P}_R} = 1 - \frac{\mathbf{P}_p}{\mathbf{P}_R} = \frac{\mathbf{P}_X}{x_{dc}^2 + \mathbf{P}_X}, \tag{6.38}$$

onde $\mathbf{P}_p = (A_c x_{dc})^2/2$ é a potência gasta na transmissão da portadora, mede precisamente a percentagem da potência total transmitida usada na transmissão da mensagem. No caso dos sistemas de transmissão AM que usam o receptor coerente, a transmissão da portadora destina-se à sincronização do oscilador local, podendo ser usados valores de ζ bastante próximos dos 100%. Este é um valor limite apenas atingível no caso da modulação AM em banda lateral dupla com supressão de portadora, para o qual (6.38) toma a forma particular

$$\mathrm{SNR}_D = \gamma. \tag{6.39}$$

6.3.2 Detector de Envolvente

Como é sabido, o detector de envolvente é um receptor de AM (em termos de realização prática, mais simples do que o receptor coerente) que pode ser usado exclusivamente no caso em que não há sobremodulação, isto é, quando com probabilidade muito elevada

$$\forall t:\ x_{dc} + X(t) \geq 0,$$

onde $X(t)$ é a variável aleatória que modela em cada instante t a amplitude da mensagem. Esta é a situação ilustrada na Figura 6.13, onde $a_R(t)$ representa a função amostra da envolvente do sinal recebido. A Figura 6.15 mostra a arquitectura do detector de envolvente.

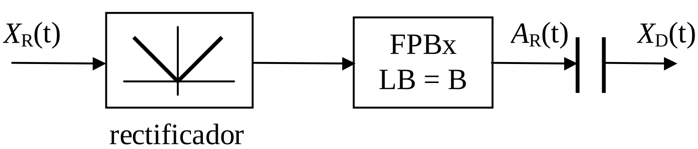

Figura 6.15: Detector de envolvente

Por observação da Figura 6.13, verificamos que

$$A_R(t) = \left([A_c(x_{dc} + X(t)) + N_I(t)]^2 + [N_Q(t)]^2\right)^{1/2}, \tag{6.40}$$

ficando claro que $A_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$ depende de modo não linear quer da mensagem quer do ruído. Este facto dificulta uma análise rigorosa do desempenho do detector de envolvente, pelo que iremos fazer uso de algumas simplificações as quais, no entanto, permitem ainda retirar alguns resultados fundamentais. Comecemos por considerar as duas situações limite: ruído forte e ruído fraco.

Ruído forte. Neste caso, a eq. (6.40) pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) &= \sqrt{\mathrm{A}_{\mathrm{c}}^2[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]^2 + 2\mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]N_{\mathrm{I}}(\mathrm{t}) + A_N^2(\mathrm{t})} \\ &= A_N(\mathrm{t})\sqrt{\varepsilon^2 + 2\frac{N_{\mathrm{I}}(\mathrm{t})}{A_N(\mathrm{t})}\varepsilon + 1} \end{aligned} \tag{6.41}$$

onde

$$A_N(\mathrm{t}) = \sqrt{N_{\mathrm{I}}^2(\mathrm{t}) + N_{\mathrm{Q}}^2(\mathrm{t})}$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]}{A_N(\mathrm{t})}.$$

Na situação de ruído forte podemos assumir que durante a maior parte do tempo (com elevada probabilidade) $A_N(\mathrm{t}) >> \mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})] \Leftrightarrow \varepsilon \approx 0$ e, portanto, tomando a aproximação de 1ª ordem do desenvolvimento em série de Taylor de (6.41), obtemos

$$A_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) \approx A_N(\mathrm{t}) + \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]N_{\mathrm{I}}(\mathrm{t})}{A_N(\mathrm{t})} = A_N(\mathrm{t}) + \mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]\cos\Phi_N(\mathrm{t}),$$

Nestas condições, a saída do detector de envolvente é constituída por duas parcelas: a primeira é a envolvente do ruído, e na segunda o sinal é mutilado por um factor multiplicativo que depende da fase do ruído. Em conclusão, quando a $\mathrm{SNR_R}$ é baixa, a saída do detector de envolvente não tem componente de sinal, tornando-se inútil o seu uso para obter uma reconstrução da mensagem.

Ruído fraco. Neste caso, fazemos

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) &= \sqrt{\mathrm{A}_{\mathrm{c}}^2[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]^2 + 2\mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]N_{\mathrm{I}}(\mathrm{t}) + A_N^2(\mathrm{t})} \\ &= \mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]\sqrt{\varepsilon^2 + 2\frac{N_{\mathrm{I}}(\mathrm{t})}{A_N(\mathrm{t})}\varepsilon + 1} \end{aligned}$$

com

$$\varepsilon = \frac{A_N(\mathrm{t})}{\mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})]}.$$

Recorrendo à mesma metodologia usada na situação anterior, obtemos

$$A_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) \approx \mathrm{A}_{\mathrm{c}}[\mathrm{x}_{\mathrm{dc}} + X(\mathrm{t})] + N_{\mathrm{I}}(\mathrm{t}). \tag{6.42}$$

Conclusão. A qualidade do desempenho do detector de envolvente em presença de ruído é fortemente condicionada pelo valor de $\mathrm{SNR_R}$. Para valores baixos de $\mathrm{SNR_R}$, a mensagem é eliminada pelo ruído na saída do detector de envolvente. Para valores elevados de $\mathrm{SNR_R}$, o detector de envolvente funciona de modo aproximadamente equivalente ao receptor coerente. Estes factos sugerem a existência de um limiar de SNR_R abaixo do qual o desempenho do detector de envolvente se degrada drasticamente, correspondendo à mutilação da mensagem. Para valores de SNR_R acima daquele limiar, a expressão (6.37) dá o valor aproximado de SNR_D,

$$SNR_D \approx \left(1 - \frac{(A_c x_{dc})^2/2}{\mathbf{P}_R}\right)\gamma. \tag{6.43}$$

Importa ainda realçar uma diferença fundamental entre o desempenho do detector de envolvente acima do limiar e o do receptor coerente. Neste último, o factor ζ definido em (6.38) pode, no limite, atingir os 100% conduzindo ao máximo valor possível de SNR_D dado por (6.39) e que corresponde à supressão da portadora. No caso do detector de envolvente, tal é impossível pois é necessário garantir a condição $x_{dc} + X(t) \geq 0,\ \forall t$. Por exemplo, se escolhermos $x_{dc} = \sqrt{\mathbf{P}_X}$, vem $\zeta = 1/2$ e (6.43) dá $SNR_D \approx \gamma/2$. Neste caso, e supondo que a densidade de probabilidade de $X(t)$ é uma função par, verifica-se a partir da desigualdade de Chebyshev que a probabilidade de ocorrer sobremodulação é limitada superiormente por 1/2, valor demasiado elevado para garantir um bom desempenho do detector de envolvente ainda que na ausência de ruído. Mesmo assim, usaremos esta situação para estabelecer o limite superior de SNR_D:

$$SNR_D \leq \frac{\gamma}{2}. \tag{6.44}$$

6.4 Desempenho dos Sistemas FM de Banda Larga

No caso do receptor de FM o sinal de entrada do desmodulador, ver Figura 6.1, é

$$X_R(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \Phi(t)) + N(t), \tag{6.45}$$

onde o desvio de fase $\Phi(t)$ verifica a relação

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{dt} = f_\Delta X(t). \tag{6.46}$$

Como se vê, o desvio de frequência $F(t)$ é proporcional à mensagem $X(t)$ que se admite ser um processo ergódico. Sem perda de generalidade, vamos assumir que a mensagem verifica a seguinte restrição

$$P\{|X(t)| \leq 1\} \approx 1,$$

ou seja, a amplitude do sinal modulante é, em valor absoluto, e durante a maior parte do tempo inferior à unidade. Portanto, podemos assumir que a densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$ da variável aleatória $X(t)$ é definida no intervalo $[-1,+1]$. Sendo válida a aproximação quasiestacionária, é sabido que o espectro de potência do sinal de FM é aproximadamente dado por

$$G_{X_c}(f)=\frac{A_c^2/2}{2f_\Delta}\left[f_X\left(\frac{-f-f_c}{f_\Delta}\right)+f_X\left(\frac{f-f_c}{f_\Delta}\right)\right]. \tag{6.47}$$

Portanto, a potência de transmissão e a largura da banda de transmissão valem, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_T &= A_c^2/2\\ B_T &\approx 2f\Delta.\end{aligned} \tag{6.48}$$

Usando (6.7), podemos tirar as componentes em quadratura do sinal recebido e definido em (6.45)

$$\begin{aligned}X_{R_I}(t) &= A_c\cos(\Phi(t)) + A_N(t)\cos(\Phi_N(t))\\ X_{R_Q}(t) &= A_c\sin(\Phi(t)) + A_N(t)\sin(\Phi_N(t))\end{aligned}$$

bem como a envolvente

$$A_R(t)=\sqrt{A_c^2 + A_N^2(t) + 2A_c A_N(t)\cos(\Phi(t)-\Phi_N(t))}$$

e a fase

$$\Phi_R(t)=\operatorname{arctg}\frac{A_c\sin(\Phi(t)) + A_N(t)\sin(\Phi_N(t))}{A_c\cos(\Phi(t)) + A_N(t)\cos(\Phi_N(t))}. \tag{6.49}$$

Como se vê, a envolvente do sinal recebido não é constante no tempo o que impõe a inclusão de um limitador na entrada do discriminador de frequência, como se mostra na Figura 6.16, onde o discriminador de frequência inclui o diferenciador, o detector de envolvente e o condensador de bloqueio da componente contínua. O sinal na saída do limitador é

$$X_L(t)=A\cos(\Phi_R(t)).$$

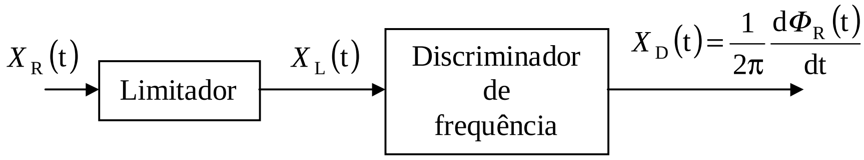

Figura 6.16: Desmodulador de frequência

Atendendo a (6.3), (6.22) e (6.48), podemos escrever

$$SNR_R = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{f_\Delta}\right)\gamma, \tag{6.50}$$

o que, relembrando que em FM de banda larga $f_\Delta >> B$, e quando comparado com (6.33), mostra que, para a mesma potência de transmissão e para o mesmo canal, as condições de recepção em FM são muito piores que as disponíveis em AM.

Como se vê na Figura 6.16, a saída do desmodulador de frequência é o sinal

$$X_D(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi_R(t)}{dt}, \tag{6.51}$$

onde $\Phi_R(t)$ é o desvio de fase definido em (6.49). Nesta expressão é patente a dependência fortemente não linear quer em relação à componente de sinal contida em $\Phi(t)$ quer relativamente ao ruído. A análise de desempenho que iremos fazer de seguida será portanto, e tal como no caso do detector de envolvente, uma análise aproximada. Mais uma vez recorreremos à Def. 6.1.

Na **ausência de ruído**, $A_N(t) \equiv 0$, e usando (6.49) verificamos que $\Phi_R(t) = \Phi(t)$. Assim, tendo em conta (6.51) e (6.46), obtemos

$$X_D(t) = f_\Delta X(t)$$

e, portanto,

$$\mathbf{P}_D = f_\Delta^2 \mathbf{P}_X. \tag{6.52}$$

Na **ausência de sinal modulante**, $X(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \Phi(t) \equiv 0$, e (6.49) toma a forma

$$\begin{aligned}\Phi_R(t) &= \operatorname{arctg}\frac{A_N(t)\sin(\Phi_N(t))}{A_c + A_N(t)\cos(\Phi_N(t))} \\ &= \operatorname{arctg}\frac{N_Q(t)}{A_c + N_I(t)}\end{aligned} \tag{6.53}$$

onde se fez uso das relações (6.7). Recorrendo à metodologia usada no caso do estudo do detector de envolvente, vamos considerar os dois casos limite: ruído forte e ruído fraco.

Ruído forte. Quando SNR_R toma um valor pequeno é lícito assumir que durante a maior parte do tempo (com elevada probabilidade) se verifique a condição $N_I(t) \approx N_Q(t) >> A_c$, o que usado em (6.53) dá

$$\Phi_R(t) \approx \Phi_N(t).$$

Nesta situação, a componente de sinal, aqui representada pela portadora, fica praticamente ausente na saída do desmodulador de frequência.

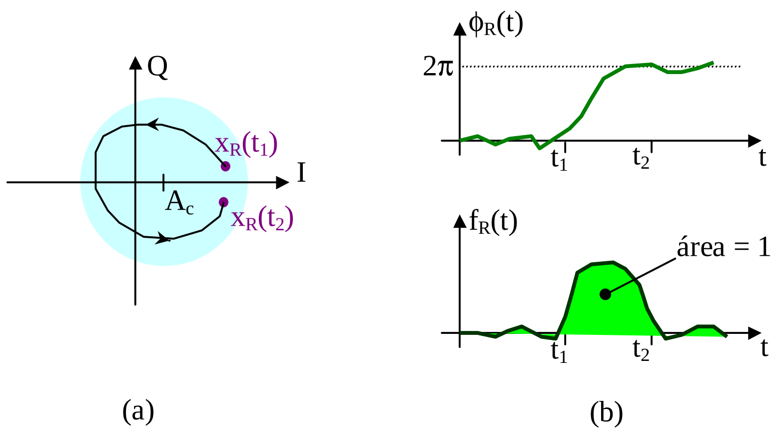

Figura 6.17: FM em ruído forte. (a) representação no plano das componentes em quadratura; (b) desvios instantâneos de fase e de frequência

Nas condições aqui consideradas, o ponto que representa o sinal no plano das componentes em quadratura situar-se-á com grande probabilidade na região sombreada da Figura 6.17-(a) a qual está aproximadamente centrada na origem. Dada a aliatoriedade do comportamento do ruído, o sinal $x_R(t)$ pode com grande probabilidade descrever a trajectória ilustrada entre os instantes t_1 e t_2, a que corresponde a um salto de fase de 2π como se mostra na Figura 6.17-(b). A duração $t_2 - t_1$ do intervalo de tempo em que ocorre o salto de fase é muito pequena e da ordem de $1/B_T$. A Figura 6.17-(b) mostra também a evolução do desvio de frequência enquanto ocorre o salto de fase, representada por um impulso de duração $t_2 - t_1$ delimitando uma área unitária. A repetição temporal deste fenómeno produz na saída do desmodulador um sinal do tipo ruído impulsivo em que a frequência de ocorrência dos impulsos aumenta com a potência do ruído.

Podemos assim concluir que abaixo de um certo valor de limiar da SNR_R, o receptor de FM apresenta na saída picos de ruído que cancelam a componente de sinal.

Ruído fraco. Neste caso, assumimos que $N_I(t) \approx N_Q(t) << A_c$ e (6.53) toma a forma

$$\Phi_R(t) \approx \operatorname{arctg}\frac{N_Q(t)}{A_c} \approx \frac{N_Q(t)}{A_c}. \tag{6.54}$$

A saída do desmodulador é[6]

$$X_D(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi_R(t)}{dt} \approx \frac{1}{2\pi A_c}\left\lfloor \frac{dN_Q(t)}{dt} \right\rfloor_B. \tag{6.55}$$

A Figura 6.18 ilustra a construção do espectro de potência do processo definido na expressão anterior, o qual é dado por

$$G_{X_D}(f) = \left(\frac{1}{2\pi A_c}\right)^2 |j2\pi f|^2 \left\lfloor G_{N_Q}(f)\right\rfloor_B = \left\lfloor \eta\left(\frac{f}{A_c}\right)^2 \right\rfloor_B. \tag{6.56}$$

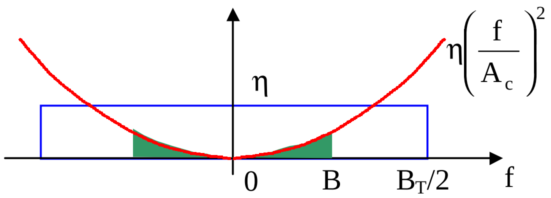

Figura 6.18: Espectro de potência da saída do desmodulador na ausência da mensagem

A potência de saída é dada pela área da região sombreda e vale

$$\mathbf{P}_N = \frac{\eta B^3}{3\mathbf{P}_R}. \tag{6.57}$$

Usando (6.52), (6.57) e (6.22) obtemos

$$SNR_D = 3P_X\left(\frac{f_\Delta}{B}\right)^2 \gamma. \tag{6.58}$$

[6] A notação $\lfloor X \rfloor_B$ significa que X está restringido à banda de largura B.

Portanto, acima do limiar, a SNR_D do receptor de FM cresce com o quadrado da razão entre as larguras de banda de transmissão e da mensagem. No entanto, é necessário ter em conta que um aumento indiscriminado de f_Δ conduz a uma degradação significativa da SNR_R, como se verifica facilmente a partir de (6.40). O crescimento da banda de transmissão com o consequente acréscimo da qualidade da reconstrução da mensagem tem de ser controlado por forma a garantir que a SNR_R seja ainda superior ao valor do limiar.