

5 Sistemas de Transmissão

Neste capítulo iremos introduzir alguns sistemas básicos de transmissão, incluindo os sistemas de transmissão digital em banda de base e os sistemas de transmissão por modulação de portadoras sinusoidais.

5.1 Transmissão Digital em Banda de Base

A escolha dos sinais usados como suporte à transmissão dos símbolos produzidos por fontes digitais (ou resultantes da digitalização de fontes analógicas como no caso dos sistemas PCM) constitui um ponto importante no estudo de sistemas de comunicações digitais. Por exemplo, os canais de banda limitada induzem o espalhamento temporal do sinais transmitidos, como se mostra na Figura 5.1 para o caso de um canal passa-baixo. Se a entrada do canal for uma sequência de impulsos rectangulares, então a resposta a cada um dos impulsos vai interferir com os seguintes (região sombreada), o que se traduz na ocorrência de IIS¹.

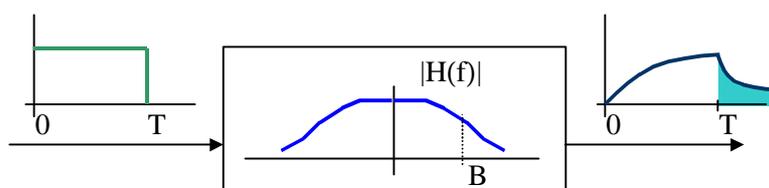


Figura 5.1: Espalhamento temporal induzido por um canal de banda limitada

Outro problema importante é o da sincronização temporal entre o emissor e o receptor no que diz respeito ao ritmo de transmissão de símbolos, $1/T$ baud. A sinalização usada deve incluir informação temporal que permita ao receptor sincronizar-se com o ritmo de transmissão por forma a que o instante em que se decide qual o símbolo transmitido seja o mais próximo possível do óptimo². Ainda outro aspecto importante da escolha do esquema de sinalização prende-se com a eficiência espectral da transmissão, isto é, o número de símbolos transmitidos em média por segundo e por Hz.

5.1.1 Formatos de Sinalização Binária

Na Figura 5.2, e para o caso da sequência binária 0110100011, ilustram-se alguns dos **formatos de sinalização** (também designados por **códigos de linha**) mais usados. Os formatos (a), (c) e (e) estão neste exemplo baseados em impulsos rectangulares $p(t)$ de duração T , e $T/2$ nos casos (b) e (d) em que há retorno a zero. Em todas as situações ilustradas a taxa de transmissão é $r = 1/T$ baud.

O formato **unipolar** corresponde a uma sinalização do tipo *on-off*, isto é, o impulso só é transmitido quando ocorre, por exemplo, o bit 1. Como o impulso ocupa todo o intervalo de símbolo, este formato é dito unipolar sem retorno a zero. No caso do formato **unipolar com**

¹ IIS – Interferência Inter Simbólica.

² Por exemplo, no sentido de garantir a mínima probabilidade de erro.

retorno a zero, o impulso rectangular tem duração normalmente igual a $T/2$. Qualquer destes formatos é de realização prática simples. No entanto, porque o sinal resultante não tem média nula, a sua utilização implica a transmissão de uma componente contínua o que se traduz, entre outros efeitos, num custo adicional em termos de potência de transmissão.

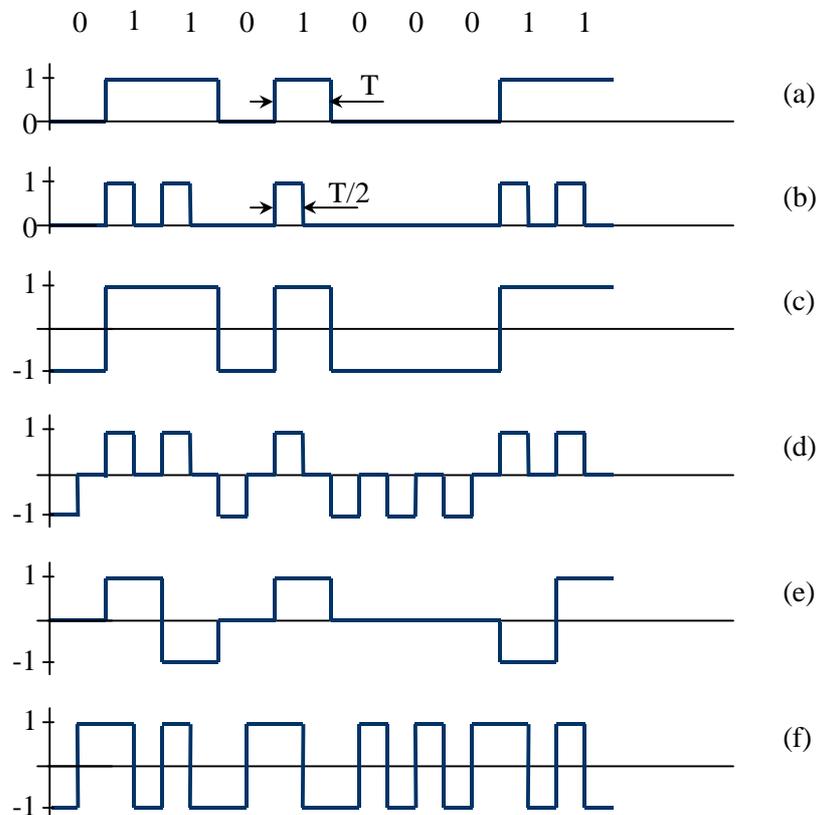


Figura 5.2: Códigos de linha: (a) unipolar; (b) unipolar com retorno a zero; (c) polar; (d) polar com retorno a zero; (e) bipolar; (f) Manchester

O formato **polar** resolve este problema no caso em que os bits são equiprováveis, pois o impulsos $p(t)$ e $-p(t)$ são transmitidos quando ocorrem os bits 1 e 0, respectivamente. No entanto, e tal como acontece com o formato unipolar, o transporte da informação relativa ao ritmo de símbolo não é garantida. De facto, se ocorrer uma sequência longa de 0's ou de 1's, o sinal mantém-se constante durante esses períodos do tempo. Não existindo passagens por zero a um ritmo certo, dificilmente o receptor poderá sincronizar-se com o emissor. Outra desvantagem do formato polar tem a ver com a questão da inversão de polaridade que ocasionalmente possa ser introduzida pelo canal de transmissão. Ao contrário do que acontece com o formato unipolar, o formato polar não permite detectar a inversão de polaridade o que se traduz em erros sistemáticos na saída do detector.

O formato **bipolar** tem capacidade de detecção da inversão de polaridade, resolvendo o problema atrás referido. Neste formato, ao símbolo 0 corresponde a ausência de transmissão e ao bit 1 correspondem os impulsos $p(t)$ e $-p(t)$ em regime de alternância. A falha deste regime de alternância provocada pela inversão da polaridade pode assim ser detectada pelo receptor. No entanto, o formato bipolar também não resolve o problema da sincronização de símbolo.

O formato do tipo **Manchester** é, de entre aqueles que aqui considerámos, aquele que melhor resolve o problema da sincronização de símbolo. De facto, mesmo que ocorram sequências longas de 0's ou 1's, está sempre garantida uma passagem por zero por cada

intervalo de sinalização com duração T . Naturalmente que, ocorrendo um maior número de transições por unidade de tempo, este formato é aquele que requer a banda de transmissão mais larga, o que se traduz numa menor eficiência espectral.

5.1.2 Densidade Espectral de Potência

No sentido de caracterizar a eficiência espectral dos métodos de sinalização referidos no parágrafo anterior, começaremos por calcular a densidade espectral de potência do sinal PAM³ genérico

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - kT), \quad (5.1)$$

onde A_k é a variável aleatória discreta que modela a fonte digital, e $p(t)$ é o impulso de sinalização. Recordemos, eq. (3.41), que o espectro de potência é definido por

$$G_X(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} E \left\{ \left| \tilde{X}_{T_0}(f) \right|^2 \right\}, \quad (5.2)$$

onde $\tilde{X}_{T_0}(f)$ é, de um ponto de vista formal, a transformada de Fourier da variável aleatória $X_{T_0}(t)$ que modela em cada instante do tempo a amplitude de um troço com duração T_0 do processo $X(t)$ definido em (5.1). Fazendo $T_0 = (2K + 1)T$, podemos escrever

$$X_{T_0}(t) = \sum_{k=-K}^{+K} A_k p(t - kT),$$

ou seja,

$$\tilde{X}_{T_0}(f) = \sum_{k=-K}^{+K} A_k P(f) e^{-j2\pi f k T}.$$

Substituindo em (5.2), obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned} G_X(f) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2K + 1)T} E \left\{ |P(f)|^2 \left(\sum_{k=-K}^K A_k e^{-j2\pi f k T} \right) \left(\sum_{m=-K}^K A_m^* e^{+j2\pi f m T} \right) \right\} \\ &= |P(f)|^2 \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2K + 1)T} \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-K}^K E \{ A_k A_m^* \} e^{-j2\pi f (k - m) T}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$G_X(f) = |P(f)|^2 \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2K + 1)T} \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-K}^K R_A(k - m) e^{-j2\pi f (k - m) T}, \quad (5.3)$$

³ PAM – Pulse Amplitude Modulation.

onde $R_A(\cdot)$ é a autocorrelação da sequência temporal de variáveis aleatórias discretas A_k , suposta estacionária em sentido lato. Reordenando as parcelas de (5.3) de acordo com o diagrama da Figura 5.3, podemos escrever

$$G_X(f) = |P(f)|^2 \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2K+1)T} \left[\sum_{n=-2K}^{-1} \sum_{k=-K}^{n+K} R_A(n) e^{-j2\pi f n T} + \sum_{k=-K}^K R_A(0) + \sum_{n=1}^{2K} \sum_{k=n-K}^K R_A(n) e^{-j2\pi f n T} \right].$$

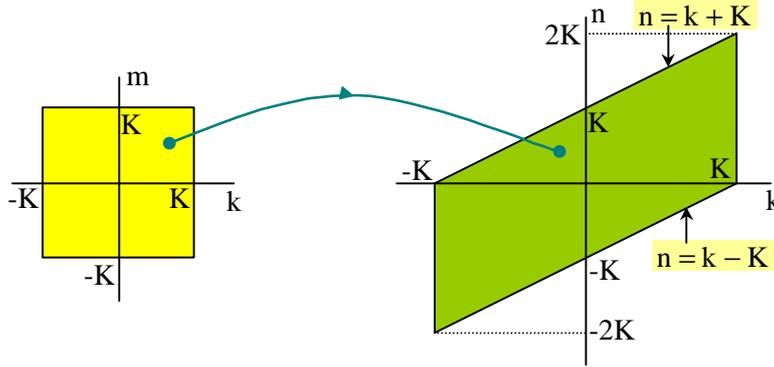


Figura 5.3: Reordenação das parcelas de (5.3)

Atendendo a que a função de autocorrelação é par, vem

$$G_X(f) = |P(f)|^2 \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2K+1)T} \sum_{n=-2K}^{2K} (2K+1) \left[1 - \frac{|n|}{(2K+1)} \right] R_A(n) e^{-j2\pi f n T},$$

ou seja

$$G_X(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n=-2K}^{2K} \left[1 - \frac{|n|}{2K+1} \right] R_A(n) e^{-j2\pi f n T}.$$

Quando $K \rightarrow \infty$, as rectas $1 - \frac{|n|}{2K+1}$ tendem para a horizontal de amplitude unitária pelo que, assumindo que a série converge, se obtém

$$G_X(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) e^{-j2\pi f n T}. \quad (5.4)$$

Exemplo 5.1: Consideremos o formato unipolar, com bits equiprováveis, sendo a sequência aleatória definida por

$$\forall k: A_k = \begin{cases} a & \text{bit 1} \\ 0 & \text{bit 0} \end{cases}.$$

Neste caso, e supondo que a fonte digital não tem memória,

$$R_A(0) = E\{A_k^2\} = 0^2 \Pr\{A_k = 0\} + 1^2 \Pr\{A_k = 1\} = \frac{a^2}{2},$$

e, para $\forall n \neq 0$, $R_A(n) = E\{A_k A_{k-n}\}$, onde o par $A_k A_{k-n}$ pode tomar quatro configurações possíveis: 00, 0a, a0, e aa; portanto, $R_A(n) = a^2/4$. Em conclusão, para o formato unipolar considerado neste exemplo, obtivemos

$$R_A(n) = \begin{cases} a^2/2 & n = 0 \\ a^2/4 & n \neq 0 \end{cases},$$

o que, substituído em (5.4), conduz a

$$G_X(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \left[\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT} \right].$$

Supondo que $p(t)$ é um impulso rectangular de duração T e amplitude unitária, então

$$\frac{|P(f)|^2}{T} = T \text{sinc}^2(fT),$$

e, portanto,

$$G_X(f) = \frac{a^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT) + \frac{a^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT}.$$

Atendendo ainda à identidade

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

e ao facto de $\text{sinc}(fT)$ ter zeros nos múltiplos de $1/T$, resulta finalmente

$$G_X(f) = \frac{a^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT) + \frac{a^2}{4} \delta(f). \quad (5.5)$$

Deixa-se como exercício, a verificação dos seguintes resultados:

$$1. \text{ Polar} \quad G_X(f) = (a^2 T) \text{sinc}^2(fT). \quad (5.6)$$

$$2. \text{ Bipolar} \quad G_X(f) = (a^2 T) \text{sinc}^2(fT) \sin^2(\pi f T). \quad (5.7)$$

$$3. \text{ Manchester} \quad G_X(f) = (a^2 T) \text{sinc}^2\left(f \frac{T}{2}\right) \sin^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right). \quad (5.8)$$

Na Figura 5.4 estão representados os espectros de potência (normalizados por $a^2 T$ dos códigos de linha atrás considerados. Para a mesma amplitude a , o formato unipolar exige uma potência de transmissão que vale $a^2/2$, metade da qual gasta na transmissão da componente

contínua. Todos os restantes formatos exigem uma potência de transmissão que vale a^2 , excepto o formato bipolar a que corresponde uma potência de transmissão $a^2/2$.

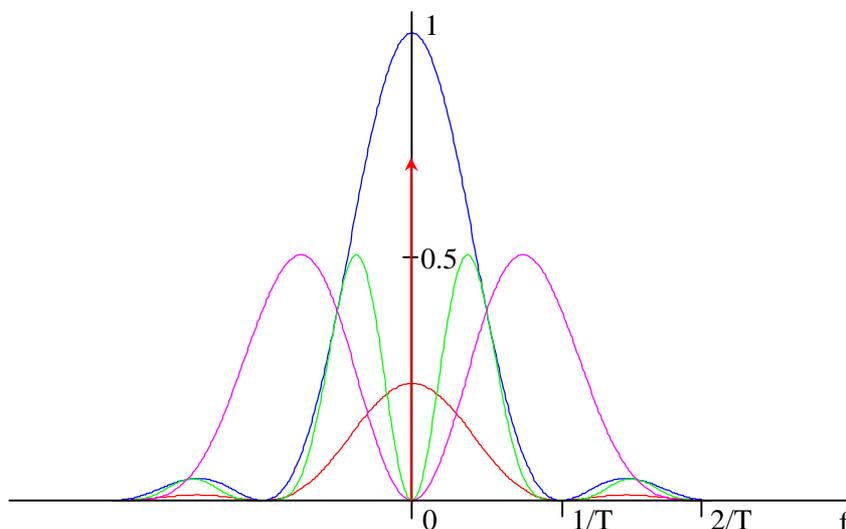


Figura 5.4: Espectro de potência dos formatos unipolar, polar, bipolar e Manchester

Da análise da Figura 5.4, verifica-se que para o caso do formato Manchester a maior parte da potência concentra-se numa banda cuja largura é aproximadamente igual a $2/T$, enquanto que para todos os restantes formatos a largura de banda vale $1/T$. Isto quer dizer que o formato Manchester tem uma eficiência espectral que vale metade da eficiência espectral dos outros códigos de linha aqui considerados.

5.1.3 Canais de Banda Limitada: Interferência Intersimbólica

Consideremos o sinal PAM genérico definido na eq. (5.1), onde o impulso $p(t)$ que, em geral, pode ter duração não limitada no tempo, verifica a seguinte condição

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = kT \text{ e } k \neq 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Nestas condições, tira-se de (5.1) que

$$X(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n p((k-n)T) = A_k \quad (5.10)$$

e, portanto, não existe IIS. Se o sinal PAM for transmitido através de um canal como, por exemplo, o da Figura 5.1, a saída vem dada por

$$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \tilde{p}(t - nT), \quad (5.11)$$

onde $\tilde{p}(t)$ é a resposta do canal ao impulso $p(t)$. Em geral, $\tilde{p}(t)$ não verifica a condição (5.9) e, portanto,

$$Y(kT) = A_k \tilde{p}(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} A_n \tilde{p}((k-n)T),$$

onde a segunda parcela representa o termo de IIS sobre o símbolo A_k . Este termo de IIS pode ser responsável por uma detecção incorrecta do símbolo A_k , mesmo em situações de ruído fraco. Este tipo de situação ocorre sempre que o canal introduz dispersão temporal, seja porque tem banda limitada, seja porque induz propagação em percursos múltiplos. Neste último caso, representado na Figura 5.5, o receptor recebe uma combinação linear de réplicas do sinal transmitido, as quais apresentam atrasos relativos que podem ser significativos.

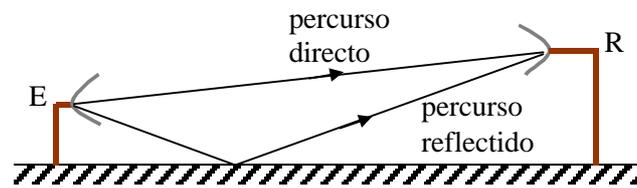


Figura 5.5: Propagação em percursos múltiplos

Consideremos então um canal passa-baixo de banda limitada e com largura de banda B_0 . Para que não exista IIS, é necessário que na saída do canal o impulso $p(t)$ verifique a condição (5.9). Se amostrarmos o impulso $p(t)$ nos instantes múltiplos de T , obtemos

$$p_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t) \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(kT) \delta(t - kT). \quad (5.12)$$

Por outro lado, e tendo em conta que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

formam um par de Fourier, temos

$$P_\delta(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\left(f - \frac{k}{T}\right). \quad (5.13)$$

Usando (5.12), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\left(f - \frac{k}{T}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(kT) \delta(t - kT) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(kT) e^{-j2\pi ftT}; \end{aligned}$$

no entanto, como $p(kT)$ só é diferente de zero para $k = 0$, conclui-se que

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\left(f - \frac{k}{T}\right) = p(0) = 1,$$

ou ainda,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(f - kr) = T. \quad (5.14)$$

O **critério de Nyquist**, definido pela relação (5.14), exprime no domínio da frequência uma condição equivalente a (5.9) implicando, portanto, ausência de IIS. A condição (5.14) exige que a soma ponto a ponto em f de todas as versões de $P(f)$ transladadas de kr seja constante. Como o sinal $p(t)$ tem largura de banda B_0 , o valor máximo de r que garante (5.14) é

$$r = 2B_0 \quad (5.15)$$

desde que o espectro de $p(t)$ seja

$$P(f) = \frac{1}{2B_0} \Pi\left(\frac{f}{2B_0}\right), \quad (5.16)$$

isto é, um rectângulo de amplitude $1/2B_0$ em $|f| < B_0$, como se mostra na Figura 5.6. Note-se que se $r < 2B_0$ o espectro ali representado tomaria valores iguais $1/2B_0$ e $1/B_0$, enquanto que para $r > 2B_0$ tomaria os valores $1/2B_0$ e zero. Aliás é fácil verificar que a escolha $r > 2B_0$ é impossível pois não garante a condição (5.14) seja qual for o espectro $P(f)$ com largura de banda B_0 . No entanto, como veremos mais adiante, podem ser usados valores da taxa de transmissão $r < 2B_0$ desde que se escolha convenientemente a forma de $P(f)$.

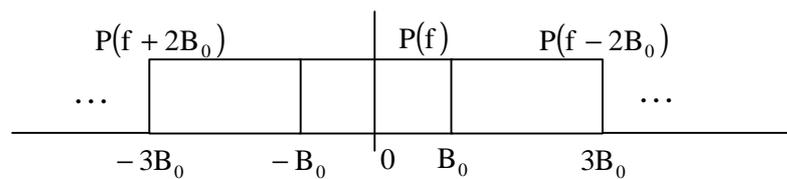


Figura 5.6: Critério de Nyquist

O ponto importante a realçar para já é que, de modo a garantir ausência de IIS e para uma banda de transmissão B_0 , **a taxa máxima de transmissão admissível é dada por (5.15)**. Esta taxa de transmissão é atingida se os impulsos $p(t)$ tiverem o espectro dado (5.16), ou seja, se

$$p(t) = \text{sinc}(2B_0 t). \quad (5.17)$$

Na Figura 5.7 estão representados o espectro do impulso óptimo $2B_0 P(f)$ em função de f/B_0 , e a respectiva forma de onda $p(t)$ em função de $t/T (= 2B_0 t = rt)$. Estão também

assinalados os intervalos de sinalização e os instantes de amostragem. Como se vê facilmente, o impulso definido em (5.17) verifica a condição (5.9).

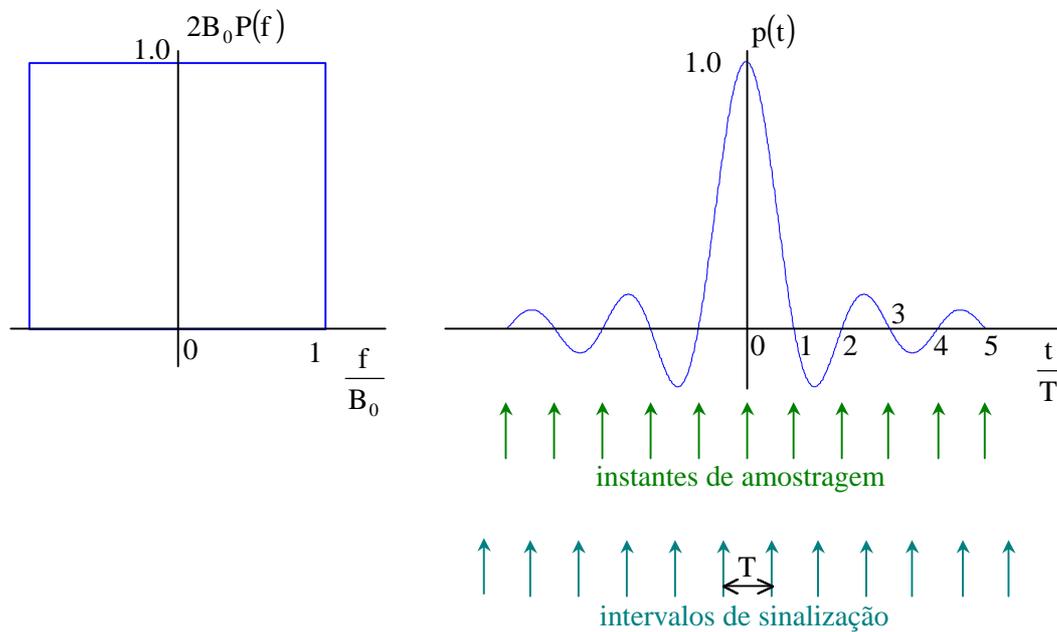


Figura 5.7: Impulso óptimo de sinalização

Em sistemas reais o emissor e o receptor não estão perfeitamente sincronizados temporalmente o que se traduz em IIS residual. Embora o impulso sinc seja aquele que viabiliza a taxa de transmissão máxima com ausência de IIS, o facto é que apresenta grande sensibilidade à IIS residual, o que se traduz numa degradação muito significativa do desempenho do sistema de transmissão. Isto é devido ao lento decrescimento do impulso sinc ao longo do tempo e resulta da descontinuidade do respectivo espectro nos pontos $f = \pm B_0$. A solução deste problema está na escolha de impulsos cujo espectro, verificando a condição (5.14), não apresente descontinuidades. Veremos de imediato que tal é possível desde que se use uma taxa de transmissão $r < 2B_0$. A Figura 5.8 ilustra uma solução possível, onde se usam impulsos cujo espectro, **sombreado**, tem largura de banda $B = 3B_0/2$ e é constante em $|f| < B_0/2$.

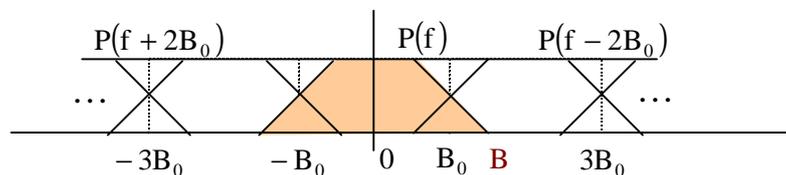


Figura 5.8: Solução alternativa usando uma taxa de transmissão inferior

Esta abordagem pode ser interpretada de dois modos distintos, consoante a restrição de partida se situa ao nível da taxa de transmissão pretendida ou em termos da largura de banda disponível. Por exemplo, se for necessário garantir uma taxa de transmissão $r = 20$ Kbps não usando impulsos sinc teremos de gastar mais recursos em termos da banda de transmissão, isto é, $B > B_0 = r/2 = 10$ KHz. No caso do exemplo da Figura 5.8, seria $B = 15$ KHz. Ao

contrário, e para o mesmo exemplo, não sendo possível dispor de uma banda de transmissão maior do que $B = 10$ KHz, teríamos de usar uma taxa de transmissão $r = 13.3$ KHz.

Impulsos *raised-cosine*. Em situações práticas é frequente usar impulsos cujo espectro é da forma *raised-cosine*⁴ como se mostra na Figura 5.9, juntamente com as respectivas formas de onda temporais.

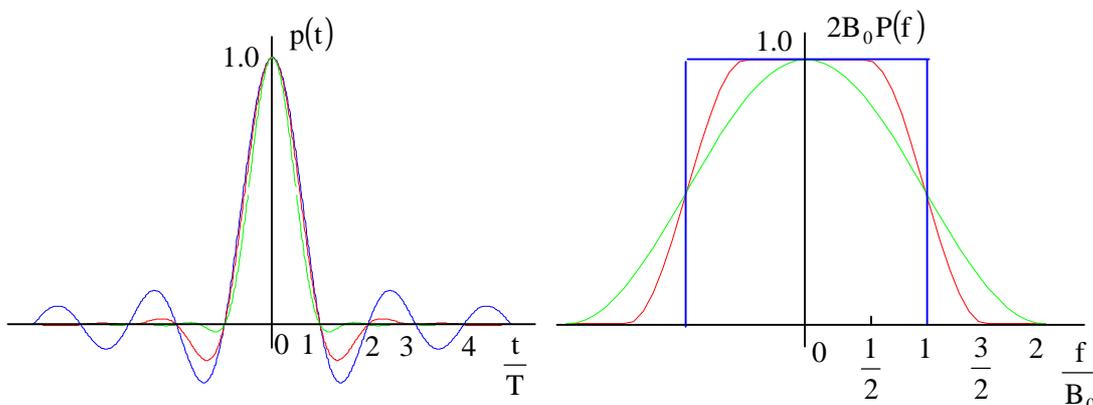


Figura 5.9: Impulsos *raised-cosine*: $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1$

Os espectros do tipo *raised-cosine* são definidos por

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B_0}, & |f| < (1 - \alpha)B_0 \\ \frac{1}{4B_0} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi}{2\alpha B_0} (|f| - (1 - \alpha)B_0) \right] \right], & (1 - \alpha)B_0 \leq |f| \leq (1 + \alpha)B_0 \\ 0, & |f| > (1 + \alpha)B_0 \end{cases} \quad (5.18)$$

O parâmetro α é designado por **factor de decaimento** (*rolloff factor*) e mede o excesso de banda de transmissão, relativamente à banda mínima, usado para garantir uma determinada taxa de transmissão com ausência de IIS. Aos espectros (5.18) correspondem os sinais

$$p(t) = \text{sinc}(2B_0 t) \frac{\cos(2\pi\alpha B_0 t)}{1 - 4(2\alpha B_0 t)^2}. \quad (5.19)$$

Note-se que para $\alpha = 0$ se recupera o impulso sinc que corresponde à sinalização ideal. O caso $\alpha = 1$ corresponde à utilização de um excesso de banda de 100%. Embora não seja bem visível na Figura 5.9, o impulso que corresponde a $\alpha = 1$ tem zeros adicionais nos instantes $\pm T/2, \pm 3T/2, \dots$, como se pode verificar facilmente a partir de (5.19). Este facto é importante pois pode ser usado no receptor para efeito da sincronização de símbolo.

⁴ Na falta de uma tradução adequada, manteremos a designação anglo-saxónica.

5.2 Transmissão Analógica por Modulação de Portadoras Sinusoidais

Modulação é o processo pelo qual se faz depender do sinal a transmitir (mensagem) um dos parâmetros característicos de uma portadora sinusoidal: amplitude, frequência e fase. O objectivo é transferir o conteúdo informativo do sinal modulante, normalmente do tipo passa-baixo, para bandas do espectro de frequências muito afastadas da origem. Por efeito da modulação resultam, entre outros, os seguintes efeitos:

- maior eficiência da radiação do sinal a transmitir;
- maior imunidade face à presença do ruído e de interferências;
- melhor aproveitamento do espectro de frequências.

Consideremos o processo

$$P(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \Theta_c), \quad (5.20)$$

onde A_c é a amplitude, f_c é a frequência (Hz) e Θ_c é a fase (rad), modelada como uma variável aleatória uniforme num intervalo de comprimento 2π . Como se sabe, as funções amostra do processo (5.20) são periódicas, com período

$$T_c = \frac{1}{f_c} \quad (5.21)$$

e frequência angular (rad/seg)

$$\omega_c = 2\pi f_c. \quad (5.22)$$

É fácil verificar que o processo $P(t)$ é estacionário de segunda ordem em sentido lato. Com efeito,

$$m_P = E_{\Theta_c} \{P(t)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} A_c \cos(2\pi f_c t + \theta) d\theta = 0 \quad (5.23)$$

e

$$\begin{aligned} R_P(\tau) &= E_{\Theta_c} \{P(t)P(t-\tau)\} \\ &= A_c^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c (t-\tau) + \theta) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau). \end{aligned} \quad (5.24)$$

O espectro de potência é, portanto,

$$G_P(f) = \frac{A_c^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)]. \quad (5.25)$$

No que segue vamos assumir que o sinal modulante (mensagem) $x(t)$ é uma função amostra de um processo passa-baixo $X(t)$, estacionário de segunda ordem em sentido lato, de média nula, e com largura de banda B .

5.2.1 Modulação de Amplitude

Na modulação de amplitude (AM⁵) a amplitude instantânea da portadora sinusoidal varia linearmente com o sinal modulante

$$X_{AM}(t) = A_c [x_{dc} + X(t)] \cos(2\pi f_c t + \Theta_c), \quad (5.26)$$

onde x_{dc} é uma constante. A Figura 5.10 mostra o diagrama de blocos do modulador de AM.

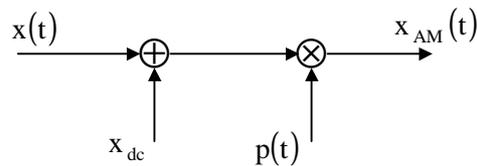


Figura 5.10: Modulador de AM

O processo $X(t)$ é naturalmente independente da variável aleatória Θ_c e, portanto, também da portadora $P(t)$. Daqui resulta que a autocorrelação do processo definido em (5.26) é, tendo em conta (5.24),

$$R_{X_{AM}}(\tau) = \frac{A_c^2}{2} [x_{dc}^2 + R_X(\tau)] \cos(2\pi f_c \tau), \quad (5.27)$$

onde $R_X(\tau)$ é a autocorrelação de $X(t)$. Tendo em conta (5.25) e usando as propriedades da transformada de Fourier, concluímos que o espectro de potência do sinal de AM é

$$G_{X_{AM}}(f) = \frac{A_c^2}{4} \left\{ [x_{dc}^2 \delta(f + f_c) + G_X(f + f_c)] + [x_{dc}^2 \delta(f - f_c) + G_X(f - f_c)] \right\}, \quad (5.28)$$

onde $G_X(f)$ é o espectro de potência de $X(t)$. A Figura 5.11 ilustra em termos dos espectros de potência o efeito da modulação de amplitude.

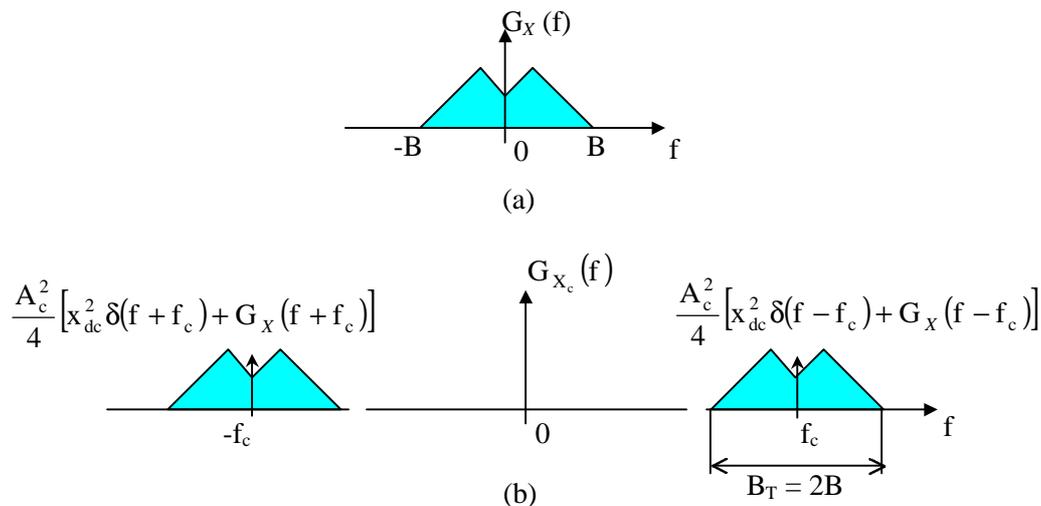


Figura 5.11: Espectros de potência da mensagem (a) e do sinal de AM (b)

⁵ AM – Amplitude Modulation

Como se vê, a modulação de amplitude envolve uma translação espectral do espectro do sinal modulante para a frequência da portadora. Verifica-se também que a largura da banda de transmissão é

$$B_T = 2B. \quad (5.29)$$

De (5.27) ou de (5.28) podemos também concluir que a potência de transmissão de um sistema de AM vale

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} (x_{dc}^2 + P_X), \quad (5.30)$$

onde P_X é a potência do processo $X(t)$.

A Figura 5.12 dá exemplos de sinais de AM gerados a partir da mesma mensagem $x(t)$. A vermelho está representada a envolvente do sinal de AM

$$A(t) = A_c |x_{dc} + X(t)|. \quad (5.31)$$

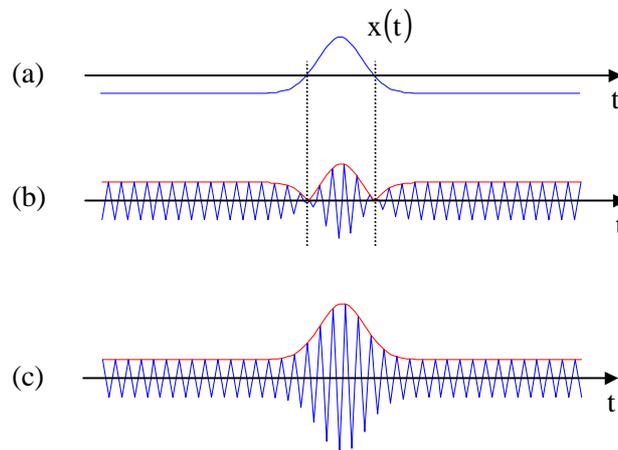


Figura 5.12: Modulação de Amplitude: (a) mensagem, (b) sinal AM sobremodulado, (c) sinal AM não sobremodulado

No caso do sinal sobremodulado (Figura 5.12 (b)), onde se fez $x_{dc} = 0$, a envolvente tem uma forma diferente da mensagem original e a portadora apresenta inversões da fase sempre que o sinal $x(t)$ passa por zero. Ao contrário, quando não há sobremodulação (Figura 5.12 (c)), ou seja, quando

$$\forall t : x_{dc} + x(t) \geq 0, \quad (5.32)$$

a envolvente e a mensagem original têm a mesma forma.

5.2.1.1 Receptor Coerente

A translação espectral induzida pela modulação de amplitude pode ser usada para proceder à desmodulação do sinal de AM. A Figura 5.13 mostra o diagrama da blocos do receptor coerente.

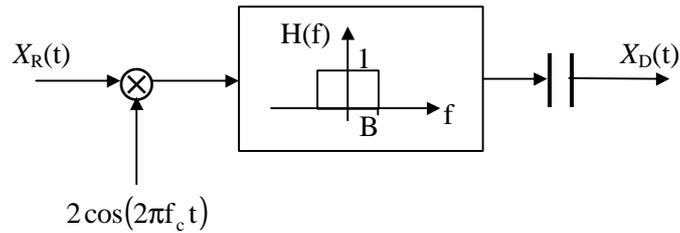


Figura 5.13: Receptor coerente

Suponhamos que à entrada temos uma amostra do sinal de AM definido em (5.26). Então, o sinal na saída do multiplicador é

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 2A_c [x_{dc} + x(t)] \cos(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c t) \\
 &= A_c [x_{dc} + x(t)] \cos(4\pi f_c t + \theta) + A_c [x_{dc} + x(t)] \cos \theta.
 \end{aligned}$$

O filtro passa-baixo elimina a componente de alta frequência (em $2f_c$) e o condensador bloqueia a componente contínua, pelo que a saída do receptor será

$$x_D(t) = A_c x(t) \cos \theta.$$

Note-se que θ é a diferença de fase entre a portadora e o oscilador local e pode tomar qualquer valor no intervalo $[-\pi, +\pi]$, em particular $\pi/2$, o que resultaria na anulação da saída. É portanto necessário que o receptor seja coerente em fase com a portadora. A sincronização de fase é um problema muito importante, mas não iremos abordá-lo aqui. De qualquer modo, estando garantida a coerência de fase entre a portadora e o oscilador local, a saída do receptor coerente de AM será

$$x_D(t) = A_c x(t). \tag{5.33}$$

5.2.1.2 Detector de Envolvente

Como vimos, no caso em que não há sobremodulação, isto é, quando se verifica a condição (5.32), a forma da envolvente coincide com a da mensagem original. Portanto, qualquer sistema capaz de extrair a envolvente da portadora poderá funcionar como desmodulador de amplitude. Este é o caso do sistema representado na Figura 5.14.

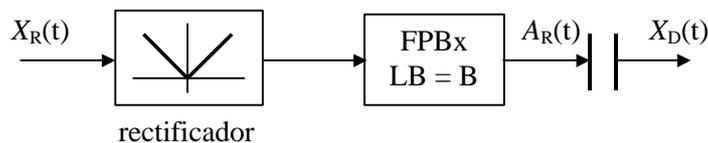


Figura 5.14: Detector de envolvente

5.2.1.3 Exemplos

Neste parágrafo vamos ilustrar com alguns exemplos as técnicas de modulação e de desmodulação discutidas nos parágrafos anteriores. A Figura 5.15 dá exemplo de um sinal gerado pela fonte e do respectivo espectro. Neste exemplo, a portadora é modulada de modo a não ocorrer sobremodulação. A Figura 5.16 mostra o sinal de AM e também o seu espectro. Este inclui uma risca em f_c que resulta da soma da componente contínua x_{dc} .

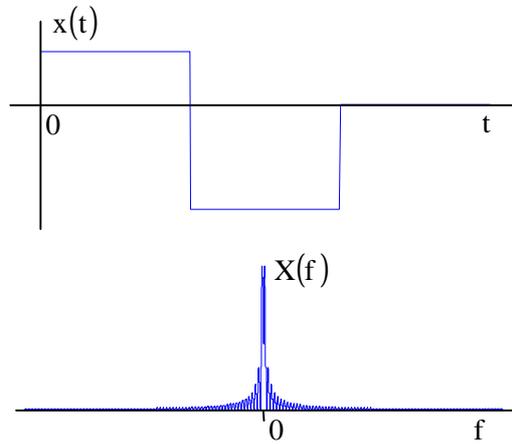


Figura 5.15: Mensagem e respectivo espectro

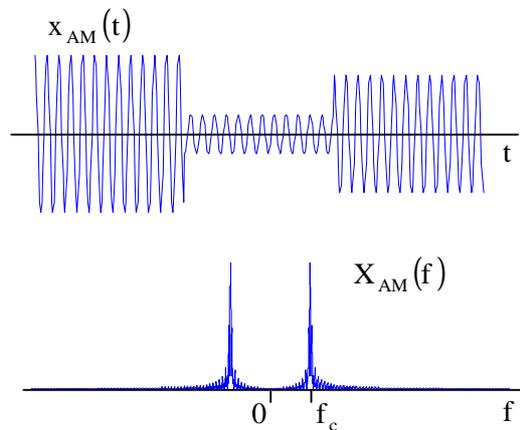


Figura 5.16: Sinal de AM sem sobremodulação e respectivo espectro

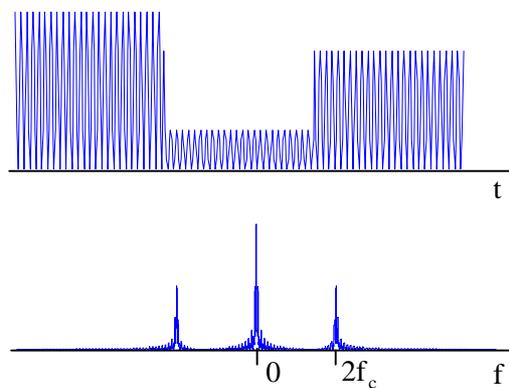


Figura 5.17: Sinal na saída do misturador do receptor coerente e respectivo espectro

Como se vê na Figura 5.13, onde se representa o diagrama de blocos do receptor coerente, o sinal de AM é multiplicado pela réplica da portadora gerada localmente. O resultado desta operação está ilustrada na Figura 5.17. Como se vê, o espectro do sinal resultante tem uma componente na banda de base e outra na banda centrada em $2f_c$. O sinal de saída do receptor coerente $\hat{x}(t)$ está representado na Figura 5.18 (note-se que a componente contínua não foi eliminada), bem como o respectivo espectro $\hat{X}(f)$. Chama-se a atenção para o facto de o filtro usado não ser ideal, pelo que o sinal reconstruído apresenta alguma distorção quando comparado com o sinal original.

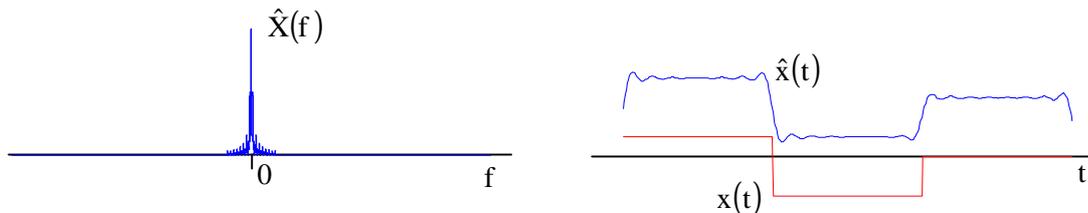


Figura 5.18: Saída do receptor coerente

Na Figura 5.19 está representado o sinal de saída do detector de envolvente. Mostra-se também o sinal na saída do rectificador. Mais uma vez se chama a atenção para a ligeira distorção apresentada pelo sinal $\hat{x}(t)$ que se deve à operação de filtragem.

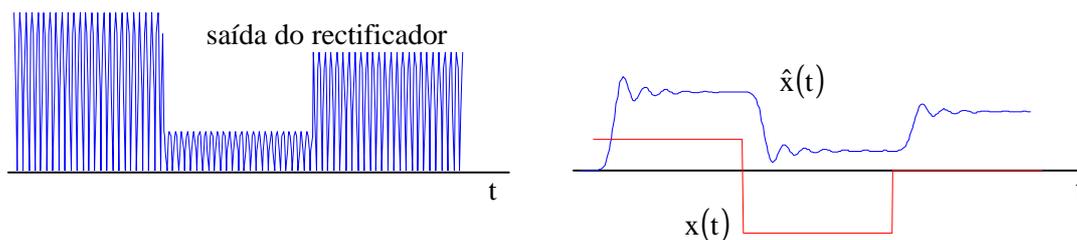


Figura 5.19: Saída do detector de envolvente

5.2.2 Modulação de Ângulo

A modulação de ângulo consiste em fazer variar a fase instantânea de uma portadora sinusoidal linearmente com o sinal modulante. Tal pode ser feito actuando directamente sobre a fase ou sobre a frequência, gerando-se um sinal PM⁶ ou FM⁷, respectivamente. Vamos designar

$$Q(t) = 2\pi f_c t + F(t) \quad (5.34)$$

por fase instantânea da portadora.

Sinal PM. Neste caso

$$X_{PM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + F(t)), \quad (5.35)$$

⁶ PM – Phase Modulation

⁷ FM – Frequency Modulation

onde o desvio instantâneo de fase

$$F(t) = \phi_{\Delta} X(t) \quad (5.36)$$

é proporcional ao sinal fonte. ϕ_{Δ} é o índice de modulação em fase.

Sinal FM. Neste caso, $X_{FM}(t)$ tem a mesma forma definida em (5.35), agora com

$$\frac{1}{2\pi} \frac{dF(t)}{dt} = F(t) = f_{\Delta} X(t), \quad (5.37)$$

onde $F(t)$ é o desvio instantâneo de frequência, e f_{Δ} é o índice de modulação em frequência. Portanto, podemos escrever

$$X_{FM}(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi f_{\Delta} \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau \right). \quad (5.38)$$

5.2.2.1 Relação entre PM e FM

Tendo em conta as definições (5.35), (5.36) e (5.37), é fácil verificar que um modulador de fase pode ser realizado a partir de um modulador de frequência, como se ilustra na Figura 5.20. O desmodulador de fase pode também ser realizado usando um desmodulador de frequência como se vê na Figura 5.21.

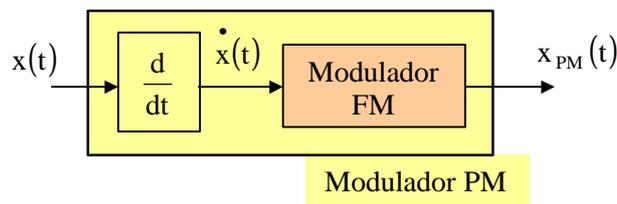


Figura 5.20: Modulador PM realizado a partir de um modulador FM

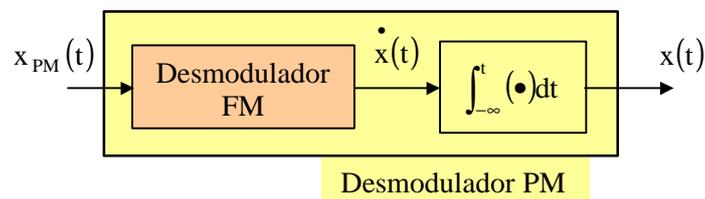


Figura 5.21: Desmodulador PM realizado a partir de um desmodulador FM

5.2.2.2 Modulador de FM

O modulador de frequência pode ser realizado com um VCO⁸, isto é, um oscilador que gera uma senoide cuja frequência instantânea varia linearmente com a tensão de entrada. A Figura 5.22 mostra a característica do VCO. A inclinação da recta é naturalmente determinada pelo índice de modulação f_{Δ} .

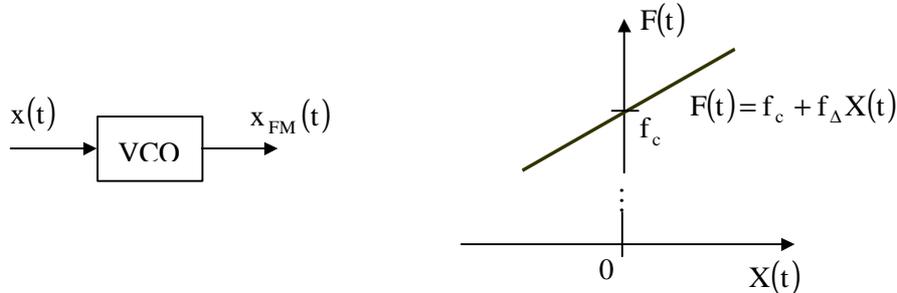


Figura 5.22: Modulador FM e característica do VCO

FM de banda estreita. De (5.38), e supondo que f_{Δ} é tal que

$$|\varphi(t)| = \left| 2\pi f_{\Delta} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right| \ll 1,$$

então

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t) \cos \varphi(t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin \varphi(t) \\ &\approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \varphi(t) \sin(2\pi f_c t). \end{aligned}$$

Isto significa que o sinal de FM (PM) de banda estreita não é mais do que um sinal de AM cuja largura de banda é dupla da largura de banda de $\varphi(t)$. Note-se que a transformada de Fourier de $\varphi(t)$ é $f_{\Delta} X(f)/f$ e, portanto, o sinal de FM de banda estreita terá uma largura de banda $B_T \approx 2B$, onde B é a largura de banda do processo fonte $X(t)$.

FM de banda larga. No caso do sinal de FM de banda larga, temos

$$f_{\Delta} \gg B. \quad (5.39)$$

A análise do sinal de FM de banda larga não é simples, pelo que apresentaremos sem demonstrar o facto essencial.

Aproximação quasiestacionária: consideremos o sinal modulante $x(t)$, função amostra de um processo estacionário $X(t)$ com largura de banda B e densidade de probabilidade da amplitude $X(t)$, $f_X(x)$, invariante no tempo. Se $f_c \gg f_{\Delta} \gg B$, então o espectro de potência do sinal de FM é aproximadamente dado por

$$G_{x_{FM}}(f) = \frac{A_c^2/2}{2f_{\Delta}} \left[f_X\left(\frac{-f-f_c}{f_{\Delta}}\right) + f_X\left(\frac{f-f_c}{f_{\Delta}}\right) \right]. \quad (5.40)$$

⁸ VCO – Voltage Controlled Oscillator

Daqui decorre que a potência de transmissão vale

$$P_T = A_c^2 / 2 \quad (5.41)$$

e que a largura de banda de transmissão é aproximadamente dada por

$$B_T \approx 2f_\Delta |X(t)|_{\max} \quad (5.42)$$

Note-se que, verificando-se (5.39), concluímos que a largura de banda de transmissão dos sistemas FM de banda larga é, de acordo com (5.42), muito maior do que a dos sistemas AM.

5.2.2.3 Discriminador de Frequência

Consideremos o sistema da Figura 5.23, onde o detector de envoltória é o sistema da Figura 5.14.

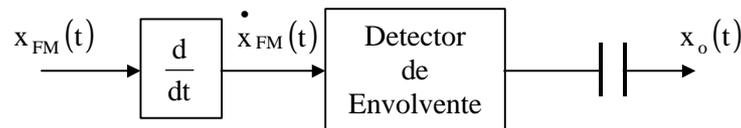


Figura 5.23: Discriminador de frequência

Usando (5.38), podemos verificar que

$$\dot{x}_{FM}(t) = -2\pi A_c (f_c + f_\Delta x(t)) \sin\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right),$$

isto é, a saída do diferenciador não é mais do que uma portadora sinusoidal cuja envoltória, de acordo com as hipóteses formuladas ($f_c \gg f_\Delta$), vale $2\pi A_c (f_c + f_\Delta x(t))$. Assim

$$x_o(t) = 2\pi A_c f_\Delta x(t).$$

5.2.2.4 Exemplos

A Figura 5.24 mostra um sinal de FM bem como o respectivo sinal modulante. O desvio instantâneo de fase deste último está ilustrado na Figura 5.25.

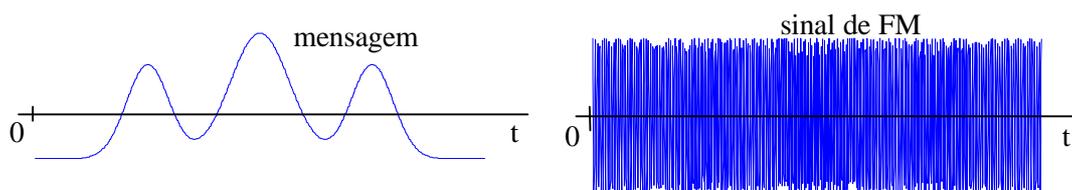


Figura 5.24: Modulação de frequência: mensagem e sinal de FM

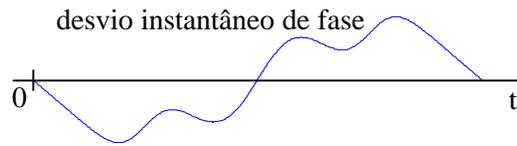


Figura 5.25: Desvio instantâneo de fase do sinal de FM da Figura 5.24

Finalmente, a Figura 5.26 mostra o sinal de saída do discriminador de frequência, sobreposto com a mensagem original e devidamente escalado. Os artefactos presentes nas extremidades do referido sinal são resultado, não só do algoritmo numérico de diferenciação usado na simulação, mas também do filtro usado no detector de envolvente.

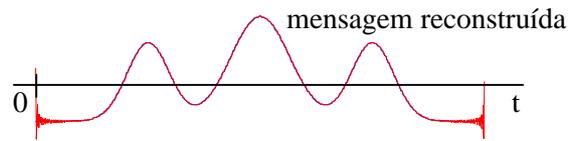


Figura 5.26: Sinal reconstruído pelo discriminador de frequência