

$$\begin{aligned}
 x_a(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_a) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_a) \delta(t - kT_a)
 \end{aligned}
 \quad (4.1)$$

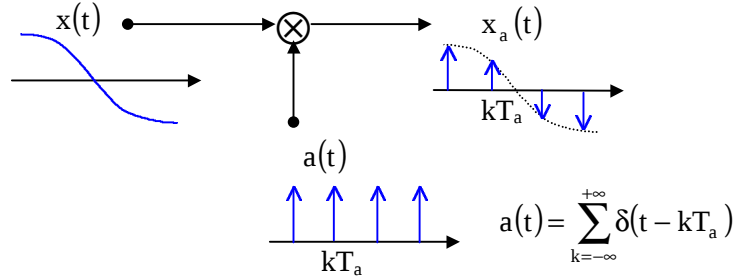


Figura 4.2: Amostragem ideal

Uma vez que, de acordo com (4.1),

$$x_a(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_a),$$

e que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_a) \leftrightarrow f_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_a), \quad (4.2)$$

onde

$$f_a = \frac{1}{T_a} \quad (4.3)$$

é a **frequência de amostragem**, então

$$\begin{aligned}
 X_a(f) &= f_a X * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_a) \\
 &= f_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_a)
 \end{aligned}
 \quad (4.4)$$

Portanto, o espectro do sinal amostrado é a sobreposição de versões do espectro do sinal original transladado para as frequências definidas por todos os múltiplos inteiros da frequência de amostragem, como se ilustra na Figura 4.3.

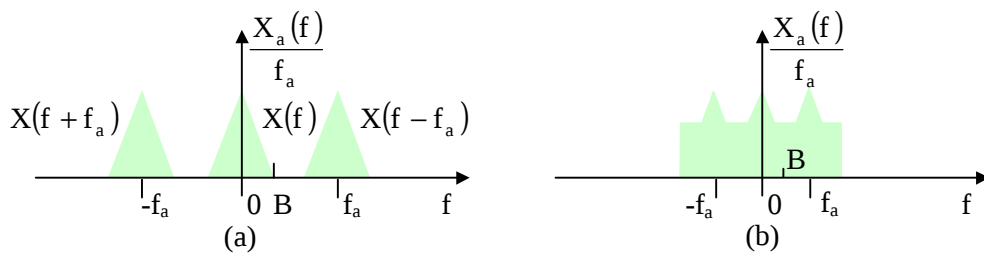


Figura 4.3: Espectro do sinal amostrado: (a) $f_a > 2B$; (b) $f_a < 2B$

Como se pode ver, as réplicas do espectro do sinal original surgem perfeitamente individualizadas apenas no caso (a) em que a frequência de amostragem é superior a duas vezes a largura de banda de $x(t)$. É óbvio que nesta situação se pode recuperar o sinal original $x(t)$, filtrando passa-baixo o sinal amostrado $x_a(t)$ como se mostra na Figura 4.4.

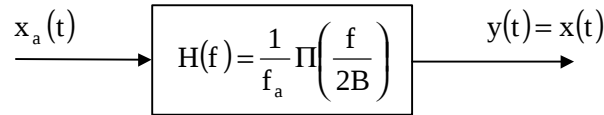


Figura 4.4: Reconstrução do sinal original por filtragem ideal passa – baixo

No caso em que $f_a = 2B$ temos

$$H(f) = \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \leftrightarrow h(t) = \text{sinc}(2Bt) \quad (4.5)$$

e de (4.1) obtém-se

$$y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_a) \text{sinc}(2B(t - kT_a)). \quad (4.6)$$

Este resultado mostra que, qualquer que seja o instante t considerado, a amplitude do sinal $x(t)$ com largura de banda limitada B se pode obter exclusivamente a partir das respectivas amostras temporais $x(kT_a)$ através de uma operação de interpolação usando como funções interpoladoras $\text{sinc}(2B(t - kT_a))$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Esta operação de interpolação é realizada pelo filtro passa – baixo ideal da Figura 4.4, o qual é neste contexto usualmente designado por filtro de interpolação. É ainda interessante notar que

$$\begin{aligned} T_a^{-1} = f_a = 2B \Rightarrow & \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - kT_a)) \text{sinc}(2B(t - nT_a)) dt \\ & = \frac{1}{2B} \text{sinc}(n - k) = \begin{cases} 1/2B, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

ou seja, (4.6) constitui uma representação do sinal $x(t)$ como uma combinação linear de componentes ortogonais. Usando (4.6) e (4.7)

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad x(kT_a) = 2B \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \text{sinc}(2B(t - kT_a)) dt, \quad (4.8)$$

o que mostra que $x(kT_a)$ representa a projeção de $x(t)$ segundo a "direção" $\text{sinc}(2B(t - kT_a))$. O conjunto de funções $\{\text{sinc}(2B(t - kT_a))\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ forma então uma base ortogonal de dimensão infinita que gera todos os sinais de energia com largura de banda limitada B .

4.3 Quantização

A amostragem conduz à discretização temporal do processo original $X(t)$ definido em tempo contínuo. Na prática, a amostragem é realizada pelo amostrador com retenção (S&H). O S&H recolhe a amostra temporal no instante de amostragem kT_a e retém o respectivo valor da amplitude durante o intervalo de amostragem seguinte. A Figura 4.5 mostra a saída do S&H no caso em que se assume o modelo mais simples de ordem zero: a amostra é colhida instantaneamente, permanecendo constante o valor adquirido durante um intervalo de tempo de duração igual ao período de amostragem. Apesar do aspecto em escada da função amostra $x_a(t)$, deve ter-se presente o facto de que a variável aleatória $X_a(t)$ que modela a amplitude do processo $X_a(t)$ é contínua e, portanto, $X_a(t)$ é um processo analógico.

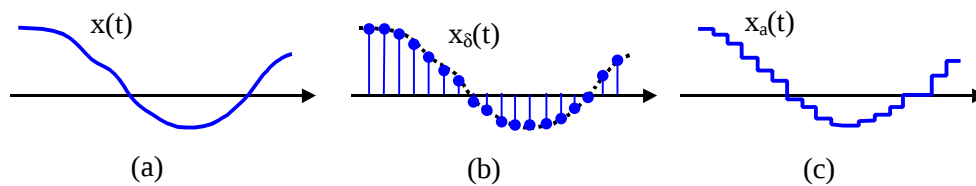


Figura 4.5: (a) sinal original; (b) sinal amostrado idealmente; (c) saída do S&H de ordem zero

Para digitalizar o sinal $x_a(t)$ é necessário fazer corresponder a cada amostra $x_a(kT_a)$ um símbolo pertencente a um alfabeto finito com cardinalidade M . Estes símbolos são, definidos por níveis de quantização da amplitude, sendo a amostra $x_a(kT_a)$ aproximada pelo nível de quantização mais próximo. Esta operação, dita de quantização, é executada pelo quantizador (ver Figura 4.1).

4.3.1 Quantização Uniforme

As possíveis características de entrada – saída de um quantizador uniforme, caracterizado pelo facto de todos os intervalos de quantização terem comprimentos iguais Δ , estão representadas na Figura 4.6.

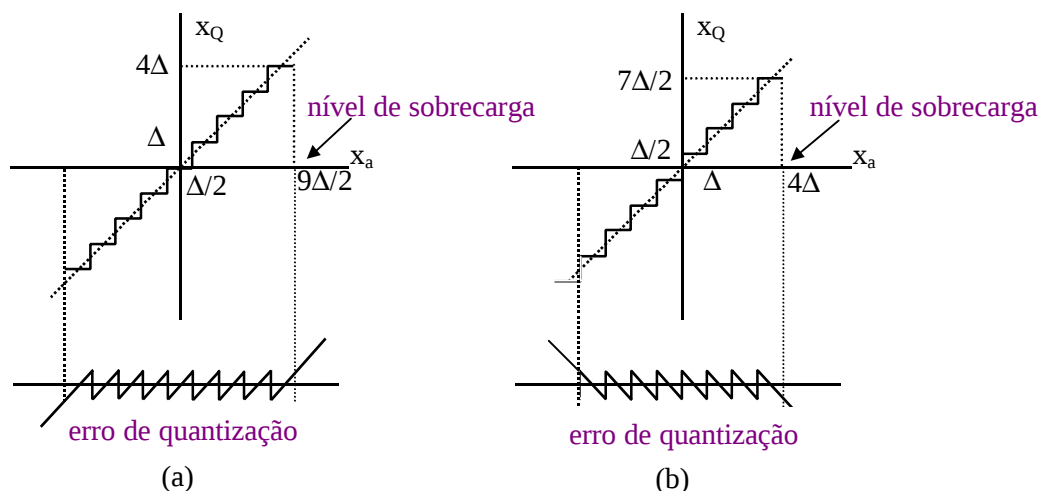


Figura 4.6: Características e erro de quantização uniforme: (a) ímpar; (b) par

Os dois tipos de característica de quantização ilustradas na Figura 4.6 diferem apenas na forma como cruzam a origem, dando origem a um número ímpar Figura 4.6-(a) ou par Figura 4.6-(b) de níveis de quantização. Em qualquer caso, e designando o **nível de sobrecarga por $x_{\max}$** , o número de níveis de quantização e o comprimento do intervalo de quantização verificam a relação

$$M\Delta = 2x_{\max}. \quad (4.9)$$

Uma vez que o número M de níveis de quantização tem de ser finito é necessário ter algum cuidado na especificação do nível de sobrecarga. Com efeito, seja qual for o valor especificado para o nível de sobrecarga, a probabilidade $P(|X_a| > x_{\max}), \forall kT_a$, é, em geral, não nula, sendo todas as amostras identificadas pelo acontecimento $|X_a| > x_{\max}$ quantizadas pelos níveis extremos. Nestes casos, o **erro de quantização** definido pela variável aleatória

$$E(kT_a) = X_Q(kT_a) - X(kT_a) \quad (4.10)$$

tomará valores que em módulo podem ser muito elevados, como se ilustra na Figura 4.6. **Devemos então dimensionar o nível de sobrecarga de modo que $P(|X_a| < x_{\max}), \forall kT_a$, seja suficientemente grande para que com elevada probabilidade o erro de quantização verifique**

$$|E(kT_a)| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (4.11)$$

4.3.2 Relação Sinal – Ruído de Quantização

O erro de quantização definido em (4.10) pode ser interpretado como tendo resultado de uma amostragem do processo que designaremos por ruído de quantização e, portanto, podemos escrever

$$X_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kT_a) \delta(t - kT_a) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kT_a) \delta(t - kT_a). \quad (4.12)$$

Se este for o processo cujas funções amostra se apresentam à entrada do filtro de reconstrução (4.5), então de (4.6) resulta

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kT_a) \text{sinc}(2B(t - kT_a)) + X(t), \quad (4.13)$$

onde

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kT_a) \text{sinc}(2B(t - kT_a)) \quad (4.14)$$

modela o **ruído de quantização**. Portanto, podemos concluir que o sinal reconstruído é uma versão do sinal original distorcida aditivamente pelo ruído de quantização. Para quantificar o desempenho (precisão) do processo de digitalização – reconstrução usa-se como medida a relação sinal – ruído de quantização aqui designada por $SQNR^2$:

$$SQNR = \frac{P_X}{P_E}. \quad (4.15)$$

² SQNR: Signal to Quantization Noise Ratio.

Por definição a potência do ruído de quantização é dada por

$$\mathbf{P}_E = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E^2(t) dt \right\},$$

ou, fazendo $2BT_a = 1$ e usando a aproximação que explora o facto de as funções $\text{sinc}(\cdot)$ decrescerem com $1/|t|$

$$E(t) \approx \sum_{k=-K}^{+K} E(kT_a) \text{sinc}(2B(t - kT_a)),$$

$$\mathbf{P}_E \approx E \left\{ \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K E^2(kT_a) \right\}. \quad (4.16)$$

Na falta de conhecimento mais preciso, assumiremos que o erro de quantização está limitado ao intervalo $[-\Delta/2, +\Delta/2]$ e tem distribuição uniforme, isto é,

$$\forall k, f_E(\epsilon) = \frac{1}{\Delta} \Pi\left(\frac{\epsilon}{\Delta}\right).$$

Nestas condições, de (4.16) resulta

$$\mathbf{P}_E \approx \frac{\Delta^2}{12}. \quad (4.17)$$

Facto 4.1: Seja Δ o comprimento dos intervalos de quantização de um quantizador uniforme. Assumindo que a probabilidade de o quantizador ser sujeito a sobrecarga é desprezável, então a SQNR vale³

$$\text{SQNR}_U \approx \frac{\mathbf{P}_X}{\Delta^2/12}. \quad (4.18)$$

Como seria de esperar, a SQNR diminui quando o comprimento do intervalo de quantização aumenta, o que se traduz numa reconstrução menos precisa do sinal original. Uma das estratégias possíveis para combater este efeito consistiria em, para o mesmo nível de sobrecarga, aumentar o número M de níveis de quantização. Como veremos de seguida, uma simples análise qualitativa do problema mostra que esta não é necessariamente a estratégia mais adequada.

4.4 Taxa de Geração de Dados Binários num Sistema PCM

Recorrendo à Figura 4.1, verificamos que a jusante do quantizador existe um bloco de codificação que, em geral, gera palavras do código binário natural. Isto significa que cada um dos M níveis de quantização é codificado por uma palavra binária de comprimento⁴

$$L = \lceil \log_2 M \rceil \geq \log_2 M. \quad (4.19)$$

³ O índice U é usado para sublinhar que o resultado obtido se refere ao quantizador uniforme.

⁴ Uma vez mais a notação $\lceil (\cdot) \rceil$ designa o menor inteiro imediatamente superior ou igual a $(\cdot)$.

Naturalmente, o conversor paralelo – série terá de gerar sequência binárias de comprimento L num intervalo de tempo que não pode exceder a duração do período de amostragem. Atendendo a (4.19), concluímos que a taxa de geração de dados binários na saída do conversor paralelo – série deve verificar a desigualdade

$$r \geq \frac{\log_2 M}{T_a}. \quad (4.20)$$

Finalmente, porque o teorema da amostragem tem de ser respeitado, podemos concluir o seguinte:

Facto 4.2: Um sistema gerador de sinais PCM desenhado para sinais fonte com largura de banda não superior a B que use um quantizador de M níveis e o código binário natural gera dados binários a uma taxa nunca inferior a

$$r = 2B \log_2 M. \quad (4.21)$$

Portanto, quanto maior for quer a largura de banda da fonte quer a precisão requerida na reconstrução do sinal original, maior é a taxa de geração de dados binários necessária para transmitir o sinal fonte analógico usando técnicas de comunicação digital.

4.5 Quantização Não Uniforme

No parágrafo 4.3.2 acabámos por concluir que uma das estratégias possíveis para reduzir a SQNR resultante de um processo de quantização uniforme consistiria em, uma vez especificado previamente o nível de sobrecarga, aumentar o número M de níveis de quantização (portanto, o equivalente à diminuição do comprimento do intervalo de quantização). Se nos reportarmos ao Facto 4.2, eq. (4.21), somos obrigados a concluir que tal estratégia teria por consequência o aumento da taxa de geração de dados binários, ou seja, da taxa de transmissão necessária. O aumento da velocidade de transmissão requer por outro lado respostas temporais mais rápidas do canal de transmissão ou, de modo equivalente, bandas de transmissão mais largas. Tal facto, traduzir-se-ia necessariamente por uma maior sensibilidade do sistema de transmissão face ao ruído de canal (ruído branco) com evidente reflexo negativo na respectiva fiabilidade. Adoptando a estratégia atrás descrita, estaríamos assim a privilegiar a precisão da quantização em troca da fiabilidade de transmissão o que, em situações limite, pode ter efeitos desastrosos no desempenho global do sistema de transmissão PCM. Existem, no entanto, estratégias alternativas. Uma delas é baseada no seguinte raciocínio.

Em geral, os sinais de interesse para transmissão recorrendo a sistemas PCM, como os sinais de voz, audio e vídeo, têm média nula e as respectivas amplitudes tomam com maior probabilidade valores em intervalos mais próximos do valor médio. O quantizador uniforme não faz uso deste facto, pesando do mesmo modo os erros de quantização associados a qualquer dos valores possíveis da amplitude de entrada, ocorram eles em intervalos de maior ou menor probabilidade. Uma vez que no intervalo de funcionamento do quantizador (determinado pelo nível de sobrecarga) o erro de quantização é, para cada intervalo de quantização n com comprimento Δ_n , limitado em valor absoluto por $\Delta_n/2$, faz sentido pensar em quantizadores não uniformes que usem intervalos de quantização mais longos para amostras que ocorrem em intervalos de menor probabilidade e intervalos de quantização de menor comprimento no caso contrário. A escolha destes comprimentos deverá portanto ser feita por forma a otimizar, de acordo com determinado critério, o desempenho do processo de digitalização – reconstrução do sinal gerado pela FATC.

Um quantizador não uniforme pode ser representado pelo modelo da Figura 4.7, onde o compressor é usado como uma não linearidade que transforma intervalos de quantização não uniformes em intervalos de quantização de igual comprimento.

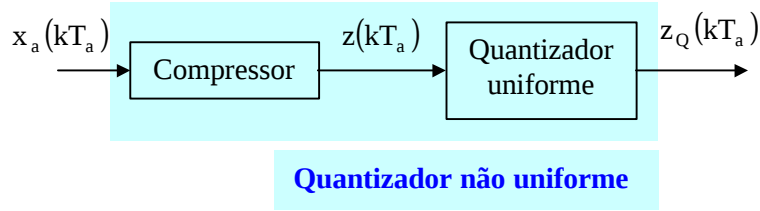


Figura 4.7: Modelo conceptual de um quantizador não uniforme

O compressor é descrito pela característica $z = C(x)$ que se exemplifica na Figura 4.8. Claramente, os intervalos de comprimento uniforme no eixo vertical (saída z do compressor) resultam de intervalos no eixo horizontal (entrada x_a do compressor) cujos comprimentos crescem com o afastamento relativamente à origem.

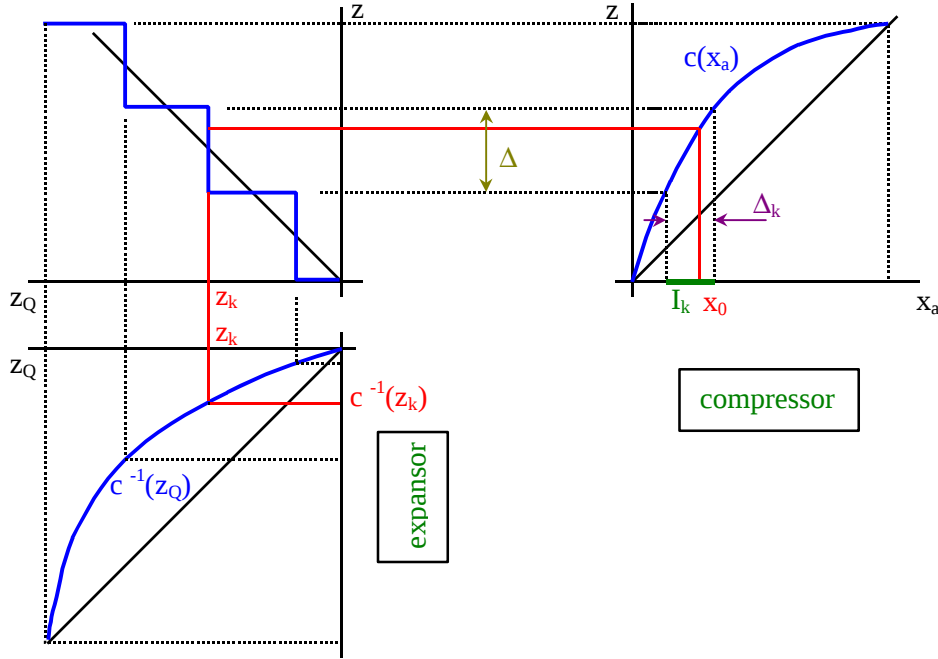


Figura 4.8: Quantização não uniforme – compressão, quantização uniforme, expansão

A quantização não uniforme gera amostras quantizadas

$$\begin{aligned} z_Q(kT_a) &= z(kT_a) + \tilde{\epsilon}(kT_a) \\ &= C(x(kT_a)) + \tilde{\epsilon}(kT_a) \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $\tilde{\epsilon}$ designa uma amostra do erro de quantização uniforme relativamente a z . De (4.22) fica claro que, mesmo que $\tilde{\epsilon} \equiv 0$, da interpolação das amostras z_Q resultaria uma versão completamente distorcida do sinal de origem $x(t)$. Tal deve-se à presença da não linearidade $z = C(x)$ introduzida pelo compressor. Portanto, antes de se proceder à filtragem de

reconstrução é necessário compensar o efeito distorcivo do compressor recorrendo a um dispositivo também não linear, o **expansor**, cuja característica é a transformação inversa⁵ $x = C^{-1}(z)$. Supondo que $\tilde{\varepsilon}(kT_a) \ll C(x(kT_a))$, resulta

$$y(kT_a) = C^{-1}(z_Q(kT_a)) = C^{-1}[C(x(kT_a)) + \tilde{\varepsilon}(kT_a)] \cong x(kT_a) + \varepsilon_{x_k}(kT_a), \quad (4.23)$$

onde o erro de quantização $\varepsilon_{x_k}(kT_a)$ depende localmente da entrada $x(kT_a)$.

4.5.1 Relação Sinal – Ruído de Quantização

Com generalidade, a característica do compressor deve exibir as seguintes características:

- P1.** $C(x)$ é monótona crescente;
- P2.** $C(x)$ tem simetria ímpar: $C(-x) = -C(x)$;
- P3.** $C(0) = 0$ e $C(x_{\max}) = x_{\max}$, onde $x_{\max}$ é o nível de sobrecarga.

Consideremos o intervalo I_k delimitado por x_k e x_{k+1} e com comprimento

$$\Delta_k = x_{k+1} - x_k. \quad (4.24)$$

Como se observa na Figura 4.8, qualquer valor do sinal original $x_0 \in I_k$ é quantizado pelo nível z_k que se assume valer

$$z_k = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}. \quad (4.25)$$

Seja $f_X(\cdot)$ a função densidade de probabilidade da amplitude $X(t)$ das amostras do processo $X(t)$, e que se assume ser simétrica, isto é,

$$f_X(-x) = f_X(x). \quad (4.26)$$

Suponhamos que o número total M de níveis de quantização definido em (4.9) é suficientemente elevado para que seja válida a aproximação

$$p_k = \Pr(x \in I_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_X(u) du \approx f_X(z_k) \Delta_k. \quad (4.27)$$

Definindo o erro de quantização

$$E_k = z_k - X, \quad X \in I_k, \quad (4.28)$$

então, por definição, a variância do erro de quantização é

⁵ No parágrafo 4.5.1 apresentaremos as propriedades que a característica de compressão deve exibir para garantir, entre outras coisas, a existência e unicidade da transformação inversa.

$$\sigma_E^2 = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} (z_k - u)^2 f_X(u) du. \quad (4.29)$$

Particionando o intervalo de integração em intervalos de quantização I_k , e fazendo uso de (4.27), então (4.29) toma a forma

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{I_k} (z_k - u)^2 f_X(u) du \\ &\approx \sum_{k=0}^{M-1} \frac{p_k}{\Delta_k} \int_{I_k} (z_k - u)^2 du \end{aligned};$$

finalmente, recorrendo a (4.24) e (4.25),

$$\sigma_E^2 \approx \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{M-1} p_k \Delta_k^2. \quad (4.30)$$

Voltando à Figura 4.8, e na hipótese que temos vindo a assumir de M ser suficientemente elevado, temos

$$\forall x_0 \in I_k \quad \dot{C}(x_0) \approx \frac{\Delta}{\Delta_k} = \frac{2x_{\max}}{M\Delta_k},$$

o que, uma vez substituído em (4.30), dá

$$\sigma_E^2 \approx \frac{x_{\max}^2}{3M^2} \sum_{k=0}^{M-1} p_k [\dot{C}(x_0)]^2$$

ou, voltando a recorrer a (4.27),

$$\sigma_E^2 \approx \frac{x_{\max}^2}{3M^2} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} [\dot{C}(u)]^{-2} f_X(u) du. \quad (4.31)$$

Note-se que no caso da quantização uniforme $C(x) = x$, $\forall x \in [-x_{\max}, x_{\max}]$, e de (4.31) resulta $\sigma_E^2 \approx \Delta^2/12$, como seria de esperar. Seguindo um raciocínio semelhante ao usado no parágrafo 4.3.2, concluiríamos facilmente que a potência média do ruído de quantização é, no caso geral, aproximadamente dada por

$$P_E \approx \frac{x_{\max}^2}{3M^2} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} [\dot{C}(u)]^{-2} f_X(u) du$$

e, portanto, a SQNR definida em (4.15), vale

$$SQNR \approx \frac{3M^2}{x_{\max}^2} \frac{\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} u^2 f_X(u) du}{\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} [\dot{C}(u)]^{-2} f_X(u) du}. \quad (4.32)$$

O resultado obtido mostra que, com generalidade, a SQNR depende explicitamente da densidade de probabilidade da amplitude do sinal quantizado. Isto sugere que se possam desenhar quantizadores cuja característica minimize a potência do ruído de quantização. Tal é de facto possível e constitui um dos problemas fundamentais abordados na teoria da distorção (rate distortion theory) intimamente ligada ao problema da compressão de informação. Este tópico não será aqui prosseguido. Pelo contrário, abordaremos uma perspectiva diversa que tem sido adoptada, em particular, nos sistemas digitais de transmissão de voz (telefonía digital).

4.5.2 Quantização Robusta

Se observarmos a expressão (4.32) com sentido crítico, verificamos que a condição

$$\dot{C}(x) = \frac{K}{x}, \quad |x| \leq x_{\max}, \quad (4.33)$$

onde K é uma constante arbitrária, garante que a SQNR se torne independente de $f_X(\cdot)$, tornando o [quantizador robusto](#) face às propriedades estatísticas da amplitude do sinal a quantizar. De facto, nestas condições,

$$SQNR \approx K^2 \frac{3M^2}{x_{\max}^2} = \frac{K^2}{\Delta^2/12}. \quad (4.34)$$

Usando a propriedade P3 da característica $C(x)$ como condição fronteira da solução da equação diferencial (4.33), obtemos

$$C(x) = x_{\max} + K \ln \left(\frac{x}{x_{\max}} \right). \quad (4.35)$$

Faz-se notar que a característica $C(x)$ especificada por (4.35) não se define em $x=0$. Na prática, é usual definir a característica de compressão de modo que seja aproximadamente (ou mesmo) linear na vizinhança de $x=0$, garantindo-se $C(0)=0$, seguindo uma lei logarítmica nos restantes valores de x .

4.5.3 Normas Internacionais de Quantização de Sinais de Voz

As normas internacionais usadas para quantização de sinais de voz em sistemas telefónicos digitais são a lei- μ

$$\frac{C(|x|)}{x_{\max}} = \frac{\ln(1 + \mu|x|/x_{\max})}{\ln(1 + \mu)}, \quad 0 \leq \frac{|x|}{x_{\max}} \leq 1, \quad (4.36)$$

adoptada por exemplo nos Estados Unidos, Canadá e Japão, e a lei-A

$$\frac{C(|x|)}{x_{\max}} = \begin{cases} \frac{A|x|/x_{\max}}{1 + \ln A}, & 0 \leq \frac{|x|}{x_{\max}} \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(A|x|/x_{\max})}{1 + \ln A}, & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{\max}} \leq 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

adoptada na Europa. A Figura 4.9 ilustra estas características para diversos valores dos parâmetros μ e A , em particular, para os valores práticos $\mu = 255$ e $A = 87.56$, respectivamente.

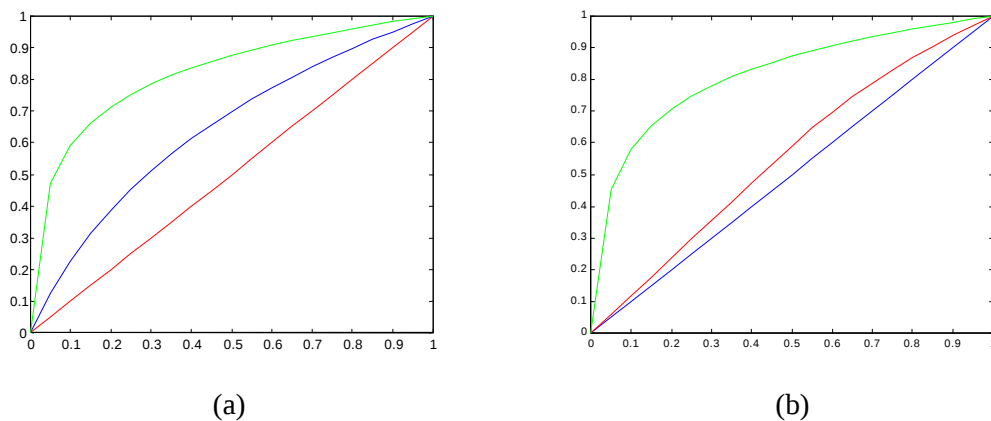


Figura 4.9: (a) lei- μ : $\mu = 0, 5, 255$; (b) lei-A: $A = 1, 2, 87.56$

4.6 Receptor de Sinais PCM

A Figura 4.10 mostra a arquitectura de um receptor de sinais PCM, onde o bloco de filtragem rejeita todas as componentes de frequência fora da banda de transmissão. O expansor compensa a distorção não linear introduzida pelo quantizador não uniforme. O detector binário de entrada é responsável pela reconstrução da sequência binária transmitida. Esta reconstrução é feita na presença de ruído pelo que a probabilidade de ocorrência de erros é não nula.

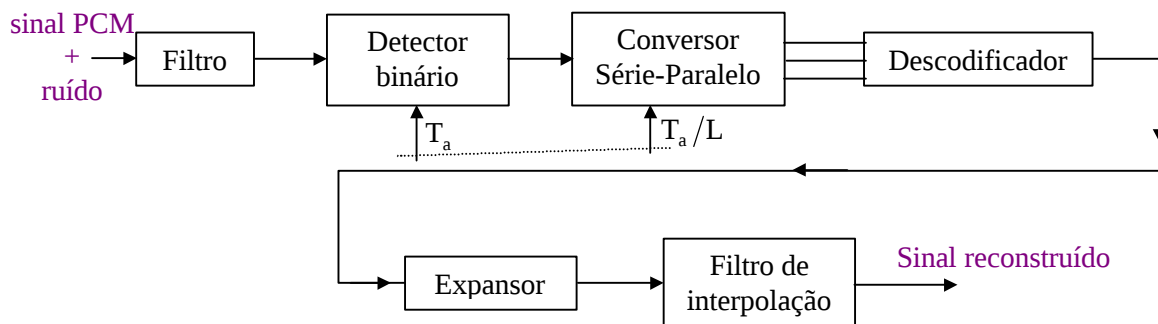


Figura 4.10: Arquitectura do receptor de sinais PCM

Portanto, o sinal reconstruído constitui uma versão do sinal original gerado pela FATC distorcida pelo ruído de quantização e pelo efeito dos erros de transmissão induzidos pelo ruído de canal. A importância destes dois efeitos distorcivos será avaliada mais tarde quando estudarmos o desempenho deste tipo de sistema.