3 Sinais Aleatórios em Tempo Contínuo. Parte II: Modelos de Fontes de Informação e de Ruído.

No capítulo anterior tivemos oportunidade de recordar os conceitos básicos da teoria das probabilidades e das variáveis aleatórias. Neste capítulo faremos uso destas ferramentas de modo a construir o modelo de um processo estocástico. Este tipo de sinais será então usado para introduzir alguns modelos de fontes de informação e de ruído.

3.1 Conceitos Básicos

Como vimos anteriormente, um processo estocástico[1] $X(t)$ pode ser visto como um conjunto de sinais determinísticos $x(t;\xi_i)$, designados por funções amostra, onde ξ_i é um dos resultados elementares de um fenómeno físico completamente caracterizado pelo conjunto $\mathfrak{S}$ de todos os resultados experimentais directos. Neste caso, dado o espaço de probabilidade $\mathbb{P}$, faz-se corresponder a cada elemento $\xi \in \mathfrak{S}$ um sinal determinístico $x(t;\xi)$ tal como se representa na Figura 3.1 para $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_i$. Note-se que este tipo de modelação é muito semelhante à de uma variável aleatória. A diferença reside no facto de cada realização $x(\xi)$ de uma variável aleatória X ser um número real, enquanto que uma realização do processo $X(t)$ é um sinal $x(t;\xi)$ que varia ao longo do tempo. A cada instante t_0 e a cada elemento $\xi \in \mathfrak{S}$ corresponde um número $x(t_0;\xi)$, como também se ilustra na Figura 3.1. Estes números correspondem a realizações da variável aleatória $X(t_0)$. Por outras palavras: em qualquer instante de tempo, o "valor" de um processo estocástico é uma variável aleatória.

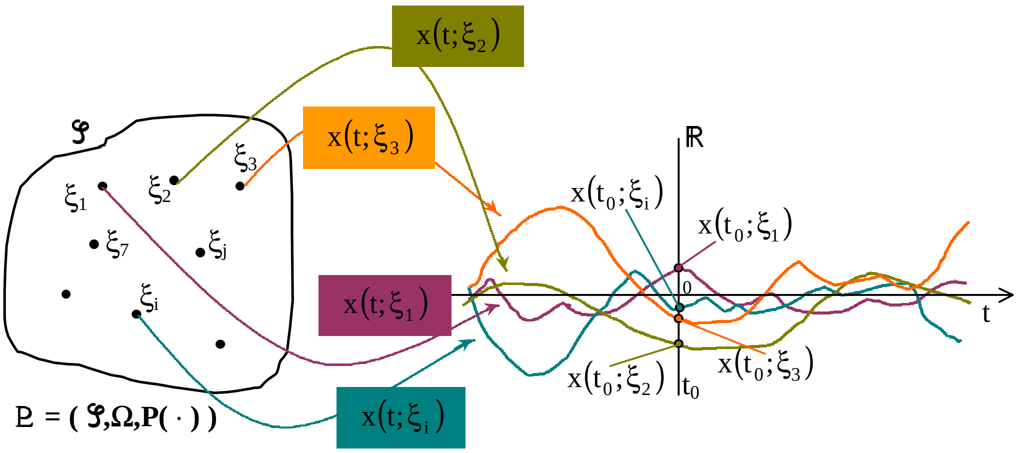

Figura 3.1: Modelação de um processo estocástico

O facto anterior sugere outro modo de modelar um processo estocástico. Embora menos intuitivo, o modelo que a seguir introduzimos é mais apropriado para um desenvolvimento matemático preciso da teoria dos processos estocásticos.

Def. 3.1- Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X(t_1), X(t_2), \ldots\}$ definidas nos instantes $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}$ ou, com generalidade,

[1] Um processo estocástico será sempre designado por uma letra maiúscula em itálico.

$X(t) = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Deste ponto de vista, um processo estocástico é representado por uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto em $\mathbb{R}$: se aquele conjunto for $\mathbb{R}$, então o processo é contínuo; se for um conjunto contável de pontos em $\mathbb{R}$, então o processo não é mais do que uma sequência temporal de variáveis aleatórias.

3.2 Descrição de um Processo Estocástico

A descrição completa de um processo estocástico $X(t)$ envolve a especificação da densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$ para todas as escolhas possíveis de $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in \mathbb{R}^n$ e para todos os inteiros positivos, $n = 1, 2, \ldots$

A descrição de ordem N de um processo estocástico $X(t)$ define-se como a anterior mas agora para $n = 1, 2, \ldots, N$. Um caso particular, muito importante no estudo de sistemas de telecomunicações, é o de $N = 2$. Neste caso, descrição de segunda ordem, são conhecidas: a densidade de probabilidade $f_{X(t)}(\cdot)$ de $X(t)$ para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$, e a densidade de probabilidade conjunta $f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot,\cdot)$ do par $\{X(t_1), X(t_2)\}$ para todos os pares de valores $\{t_1, t_2\} \in \mathbb{R}^2$. Note-se que, em geral, $f_{X(t)}(\cdot)$ e $f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot,\cdot)$ variam com t e $\{t_1, t_2\}$, respectivamente.

Embora existam problemas cuja abordagem implica o recurso a descrições de ordem superior, outros, como os que iremos considerar, podem ser tratados usando apenas descrições de segunda ordem. Daí que, no que se segue, venhamos a considerar apenas descrições de segunda ordem.

3.2.1 Médias Estatísticas

A média, ou valor expectável, de um processo $X(t)$ é uma função determinística do tempo $m_X(t)$ que se define em cada instante $t \in \mathbb{R}$ como o valor expectável da variável aleatória $X(t)$.

Def. 3.2- ***Média.*** Seja $f_{X(t)}(\cdot)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória $X(t)$ que em cada instante $t \in \mathbb{R}$ constitui a descrição de primeira ordem do processo $X(t)$. Então, a média de $X(t)$ é

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = \int_{\mathbb{R}} \mu f_{X(t)}(\mu) d\mu, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (3.1)$$

Como foi evidenciado anteriormente, $f_{X(t)}(\cdot)$ é, em geral, variante com t o que implica a variabilidade temporal da média de um processo estocástico.

Def. 3.3- ***Autocorrelação.*** Seja $f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot,\cdot)$ a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $\{X(t_1), X(t_2)\}$ que para cada par de instantes

$\{t_1, t_2\} \in \mathbb{R}^2$ constituem a descrição de segunda ordem do processo $X(t)$. Então, a autocorrelação de $X(t)$ é

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mu\nu f_{X(t_1)X(t_2)}(\mu,\nu)d\mu d\nu \end{aligned}, \forall\{t_1,t_2\} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.2)$$

Aqui repete-se o comentário feito a propósito da média. Uma vez que $f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot,\cdot)$ depende de $\{t_1, t_2\}$, o mesmo acontece, em geral, com a autocorrelação.

3.3 Estacionariedade de Processos de Segunda Ordem

Muitas das propriedades dos processos mais frequentemente usados em problemas de interesse prático são convenientemente interpretáveis recorrendo às descrições até à segunda ordem. Nesta secção, iremos introduzir o conceito de estacionariedade.

Def. 3.4- ***Estacionariedade em sentido estrito.*** Um processo $X(t)$ é estacionário em sentido estrito sse:

1. $\forall t, \Delta \in \mathbb{R} \quad f_{X(t)}(\cdot) = f_{X(t+\Delta)}(\cdot)$; (3.3)

2. $\forall t_1, t_2, \Delta \in \mathbb{R} \quad f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot,\cdot) = f_{X(t_1+\Delta)X(t_2+\Delta)}(\cdot,\cdot)$. (3.4)

A estacionariedade estrita é uma propriedade muito particular que poucos processos físicos verificam. A condição (3.3) significa que $f_{X(t)}(\cdot)$ é invariante no tempo, enquanto que (3.4) afirma que $f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot,\cdot)$ é invariante relativamente a qualquer translação Δ do intervalo $[t_1, t_2]$.

Podemos também introduzir uma outra noção de estacionariedade, menos restritiva, e que tem domínio de aplicabilidade mais amplo.

Def. 3.5- ***Estacionariedade em sentido lato.*** Um processo $X(t)$ é estacionário em sentido lato sse:

1. $\forall t \in \mathbb{R} \quad E\{X(t)\} = m_X$; (3.5)

2. $\forall t, \tau \in \mathbb{R} \quad E\{X(t)X(t-\tau)\} = R_X(\tau)$. (3.6)

Ao contrário da estacionariedade em sentido estrito que impõe restrições muito fortes directamente sobre a descrição probabilística do processo $X(t)$, a estacionariedade em sentido lato apenas restringe as estatísticas de $X(t)$. Mais especificamente, (3.5) implica que a média de $X(t)$ é constante no tempo, e (3.6) diz que a respectiva autocorrelação não depende explicitamente dos instantes $\{t_1, t_2\}$ mas apenas da diferença $\tau = t_1 - t_2$ entre os extremos do intervalo $[t_1, t_2]$.

Facto 3.1: Seja $X(t)$ um processo estacionário em sentido estrito. Então $X(t)$ é estacionário em sentido lato. O contrário não é, em geral, verdadeiro.

A demonstração deste facto não é aqui feita, sendo deixada como exercício. No seguimento, e salvaguardadas algumas situações que serão devidamente explicitadas, consideraremos apenas processos estacionários em sentido lato.

3.3.1 Propriedades da Autocorrelação de Processos Estacionários

A função de autocorrelação de um processo $X(t)$, estacionário em sentido lato, goza das seguintes propriedades:

P1. A autocorrelação é uma função par:

$$\begin{aligned}\forall\tau\in\mathbb{R}:\quad R_X(\tau) &= E\{X(t)X(t-\tau)\}\\ &= E\{X(t-\tau)X(t)\} = R_X(-\tau)\end{aligned} \tag{3.7}$$

P2. A autocorrelação tem um máximo em $\tau=0$:

$$\forall\tau\in\mathbb{R}:\quad |R_X(\tau)|\le R_X(0). \tag{3.8}$$

Fazendo uso de P1 e do facto de $E\left\{[X(t)\pm X(t-\tau)]^2\right\}$ ser uma quantidade não negativa, a propriedade P2 é facilmente demonstrada.

A autocorrelação providencia um meio de descrever a interdependência de duas variáveis aleatórias $X(t)$ e $X(t-\tau)$ que modelam as realizações do processo $X(t)$ em dois instantes de tempo separados de τ segundos. É aparente que quanto maior for a taxa de variação temporal de $X(t)$, mais rapidamente a autocorrelação decrescerá relativamente ao máximo $R_X(0)$ quando τ aumenta. Este decrescimento pode ser quantificado pelo tempo de descorrelação, isto é, o valor de τ a partir do qual $R_X(\tau)$ permanece abaixo de um limiar previamente especificado.

3.4 Ergodicidade

Para um processo $X(t)$, estacionário em sentido estrito, podemos definir dois tipos de média:

1. a média de conjunto já introduzida na Def. 3.2, eq. (3.1), e cuja particularização para o caso de interesse aqui se apresenta:

$$m_X = \int_{\mathbb{R}} \mu f_X(\mu)d\mu, \tag{3.9}$$

onde se fez desaparecer a dependência explícita no tempo da densidade de probabilidade da amplitude $X(t)$, $t\in\mathbb{R}$;

2. a média temporal

$$m_X(\xi_i) = \langle x(t;\xi_i) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t;\xi_i)dt\,, \tag{3.10}$$

calculada directamente a partir de uma função amostra $x(t;\xi_i)$ do processo $X(t)$.

Note-se que a média temporal $m_X(\xi_i)$ deve ser encarada como uma amostra da variável aleatória

$$M_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t)dt\,, \tag{3.11}$$

onde $X(t),\ t\in\mathbb{R}$, é a variável aleatória que em cada instante de tempo determina a descrição de primeira ordem do processo $X(t)$ (ver discussão no início da secção 3.2).

3.4.1 Ergodicidade na Média

Def. 3.6- ***Ergodicidade na média.*** O processo $X(t)$, estacionário em sentido estrito, é ergódico na média sse

$$\forall \xi_i \quad m_X = m_X(\xi_i). \tag{3.12}$$

Por outras palavras, podemos afirmar que, sendo o processo ergódico na média, então podemos usar o operador média temporal (3.10) aplicado a qualquer função amostra e obter o valor expectável da amplitude do processo considerado. Note-se que a igualdade expressa em (3.12) só é válida no limite quando $T\to\infty$. Na prática, usa-se o estimador

$$\hat{m}_X(T;\xi_i) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t;\xi_i)dt\,, \tag{3.13}$$

obtendo-se uma amostra da variável aleatória

$$\hat{M}_X(T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t)dt\,. \tag{3.14}$$

Facto 3.2: Uma condição necessária e suficiente para que o processo $X(t)$, estacionário em sentido estrito, seja ergódico na média com probabilidade 1 é:

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} E\{\hat{M}_X(T)\} &= m_X \\ \lim_{T\to\infty} \sigma^2_{\hat{M}_X(T)} &= 0 \end{aligned}. \tag{3.15}$$

A condição na média, impondo que, no limite, o valor expectável das estimativas iguale o valor expectável da grandeza estimada, garante que o estimador é não enviezado. A condição na variância (recorde-se a desigualdade de Chebishev introduzida no capítulo 2) garante que, no limite, o estimador produz uma estimativa que é igual à grandeza a estimar com probabilidade 1.

3.4.2 Ergodicidade na Correlação

Def. 3.7- ***Ergodicidade na correlação.*** O processo $X(t)$, estacionário em sentido estrito, é ergódico na correlação sse

$$\forall \tau, \xi_i \quad R_X(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t;\xi_i)x(t-\tau;\xi_i)d\tau. \tag{3.16}$$

Tal como no caso da média, a igualdade anterior só é válida no limite quando $T \to \infty$. Na prática, usa-se o estimador

$$\forall \tau \quad \hat{R}_X(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t;\xi_i)x(t-\tau;\xi_i)d\tau. \tag{3.17}$$

Facto 3.3: O processo $X(t)$, estacionário em sentido estrito, é ergódico na correlação com probabilidade 1 sse, no limite quando $T \to \infty$, o estimador (3.17) for não enviezado e a variância das estimativas for nula.

3.5 Potência e Energia

Como se sabe, os sinais determinísticos dividem-se em duas grandes classes: os sinais de energia e os sinais de potência. Consideremos um processo $X(t)$ e uma qualquer das respectivas funções amostra $x(t;\xi_i)$. Por definição, a energia E_i e a potência P_i de $x(t;\xi_i)$ são dadas por

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t;\xi_i)dt \\ P_i &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t;\xi_i)dt. \end{aligned}$$

Note-se que E_i e P_i dependem da função amostra $x(t;\xi_i)$ e, portanto, são realizações de duas variáveis aleatórias E_X e P_X, respectivamente. A potência média e a energia média do processo $X(t)$ são então definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X &= E\{P_X\} \\ \mathbf{E}_X &= E\{E_X\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

respectivamente. Formalmente,

$$\begin{aligned} P_X &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X^2(t)dt \\ E_X &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t)dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo (3.19) em (3.18) e tendo em conta a Def. 3.3, eq. (3.2), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_X &= E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}X^2(t)dt\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}R_X(t,t)dt \\ \mathbf{E}_X &= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}X^2(t)dt\right\} \qquad\quad = \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t,t)dt\end{aligned} \tag{3.20}$$

Supondo que $X(t)$ é estacionário, então de (3.20) resulta, para o caso da energia,

$$\mathbf{E}_X = \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(0)dt\,.$$

Se o processo $X(t)$ fosse de energia, tal implicaria que $\mathbf{E}_X$ fosse uma quantidade finita, o que só seria possível se $\forall t,\ R_X(0)=E\{X^2(t)\}=0$, ou seja, se $\forall t,\ X(t)=0$ com probabilidade 1. Em conclusão, no caso dos processos estacionários, apenas os processos de potência têm interesse teórico e prático. Atendendo a (3.20), podemos então concluir o seguinte:

Facto 3.4: Os processos estocásticos estacionários pertencem à classe dos sinais de potência, e têm potência média

$$\mathbf{P}_X = R_X(0) = E\{X^2(t)\}. \tag{3.21}$$

No caso dos processos ergódicos de segunda ordem,

$$\mathbf{P}_X = R_X(0) = E\{X^2(t)\} = P_i \quad \forall\xi_i \tag{3.22}$$

A propósito das conclusões do estudo anterior, podemos ainda acrescentar o seguinte comentário: as representações de frequência normalmente usadas não têm aplicação directa no caso dos sinais não determinísticos. Com efeito, a transformada de Fourier define-se, salvo casos muito particulares, apenas para sinais de energia e a série de Fourier aplica-se no caso dos sinais periódicos. Os sinais aleatórios pertencem, como vimos, à classe dos sinais de potência mas não são necessariamente periódicos. Portanto, não podemos, em geral, usar quer a transformada quer a série de Fourier para representar na frequência as funções amostra de um processo estocástico.

3.6 Processos Múltiplos

Def. 3.8- ***Independência estatística.*** Dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ são estatisticamente independentes sse, para todos os pares $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, as variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $Y(t_2)$ forem estatisticamente independentes.

Def. 3.9- ***Processos incorrelacionados.*** Dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ são incorrelacionados sse, para todos os pares $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, as variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $Y(t_2)$ forem incorrelacionadas.

Def: 3.10- ***Processos ortogonais.*** Dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ são ortogonais sse, para todos os pares $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, as variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $Y(t_2)$ forem ortogonais.

Def. 3.11- ***Correlação cruzada.*** A correlação entre dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ é definida por

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}=R_{YX}(t_2,t_1). \qquad (3.23)$$

Def. 3.12- ***Estacionariedade conjunta.*** Dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ são conjuntamente estacionários sse $X(t)$ e $Y(t)$ forem estacionários e $R_{XY}(t_1,t_2)$ só depender explicitamente de $\tau=t_1-t_2$.

3.7 Transmissão de Processos Estocásticos através de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLITs)

Nesta secção vamos estabelecer as relações de entrada – saída de SLITs quando a entrada é um processo estocástico. No estudo deste problema, consideraremos as representações no tempo e na frequência.

3.7.1 Relações Entrada – Saída no Domínio do Tempo

Consideremos um SLIT descrito pela respectiva resposta impulsional[2] $h(t)$, como se ilustra na Figura 3.2, onde $X(t)$ e $Y(t)$ representam os processos de entrada e de saída, respectivamente.

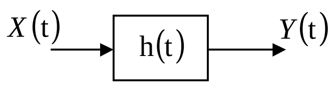

Figura 3.2: Sistema linear invariante no tempo

Se a entrada do SLIT for uma realização[3] $x_i(t)$ do processo $X(t)$, teremos na saída uma realização $y_i(t)$ do processo $Y(t)$ dada por

$$y_i(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x_i(t-\tau)d\tau, \qquad (3.24)$$

isto é, pelo integral de convolução entre a entrada e a resposta impulsional do SLIT. Mais uma vez se sublinha que, ocorrendo a entrada $x_i(t)$ aleatoriamente, então a saída $y_i(t)$ é também aleatória. De acordo com o modelo que temos vindo a usar, o processo $Y(t)$ é representado no instante t pela variável aleatória $Y(t)$ e o processo $X(t)$ é representado no instante $t-\tau$ pela variável aleatória $X(t-\tau)$. Formalmente podemos então escrever

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau = h * X(t). \qquad (3.25)$$

---

[2] A resposta impulsional de um SLIT é o sinal de saída quando a entrada é um impulso de Dirac.

[3] Para simplificar a notação, passaremos a usar $x_i(t)$ para designar a função amostra $x(t;\xi_i)$.

3.7.1.1 Média da Saída

Tendo em conta que o valor expectável é linear e que a resposta impulsional é determinística, de (3.25) vem

$$m_Y(t)=E\{Y(t)\}=E\{h*X(t)\}=h*E\{X(t)\}=h*m_X(t), \quad (3.26)$$

ou seja, a média do processo de saída é dada pelo integral de convolução entre a resposta impulsional do SLIT e a média do processo de entrada.

Entrada estacionária na média. No caso em que o processo de entrada é estacionário, $m_X(t)=m_X$, e de (3.26) resulta imediatamente

$$m_Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)m_X(\tau)d\tau=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau\right)m_X,$$

isto é,

$$m_Y=H(0)m_X, \quad (3.27)$$

onde

$$H(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (3.28)$$

é a função de transferência do SLIT dada pela transformada de Fourier da respectiva resposta impulsional. Portanto, se o processo de entrada do SLIT for estacionário na média, então a saída é também estacionária na média.

3.7.1.2 Correlações Cruzadas Entrada – Saída

Usando a Def. 3.11, eq. (3.23), podemos calcular a correlação entre o processo de saída do SLIT $Y(t)$ e o de entrada $X(t)$:

$$\begin{aligned}R_{YX}(t,t-\tau)&=E\{Y(t)X(t-\tau)\}\\&=E\left\{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-u)h(u)du\right]X(t-\tau)\right\}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}E\{X(t-u)X(t-\tau)\}h(u)du\end{aligned}$$

e, portanto,

$$R_{YX}(t,t-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t-u,t-\tau)h(u)du. \quad (3.29)$$

Recorrendo ainda à Def. 3.11, eq. (3.23), e a (3.29), podemos também concluir que

$$R_{XY}(t, t-\tau) = R_{YX}(t-\tau, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t-\tau-u, t) h(u) du . \qquad (3.30)$$

Entrada estacionária na correlação. No caso em que o processo de entrada é estacionário na correlação, $R_X(t, t-\tau) \to R_X(\tau)$, isto é, a autocorrelação depende apenas da diferença entre os instantes de tempo t e t − τ. Fazendo intervir este facto em (3.29) e (3.30) obtemos, respectivamente,

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau - u) h(u) du \Leftrightarrow R_{YX}(\tau) = h * R_X(\tau) \qquad (3.31)$$

e

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + u) h(u) du \Leftrightarrow h^- * R_X(\tau), \qquad (3.32)$$

onde se usa a notação

$$h^-(t) = h(-t). \qquad (3.33)$$

3.7.1.3 Autocorrelação da Saída

Por ser a situação de maior interesse para os assuntos que iremos estudar, consideraremos aqui apenas o caso em que o processo de entrada é estacionário.

Entrada estacionária na correlação. Neste caso,

$$R_Y(t, t-\tau) = E\{Y(t)Y(t-\tau)\} = E\{Y(t)[h * X(t-\tau)]\} = h^- * R_{YX}(\tau),$$

onde se fez uso de (3.25) e (3.33). Finalmente, e tendo em conta (3.31),

$$R_Y(\tau) = h^- * h * R_X(\tau). \qquad (3.34)$$

Portanto, se o processo de entrada for estacionário na correlação, então o processo de saída também o é e tem autocorrelação dada por (3.34).

Síntese. A conclusão mais importante a reter da discussão conduzida nesta secção resume-se no seguinte:

> **Facto 3.5:** Seja $X(t)$ um processo estacionário de segunda ordem. Suponhamos ainda que um SLIT caracterizado pelas respectivas resposta impulsional $h(t)$ e função de transferência $H(f)$ processa funções amostra $x_i(t)$ de $X(t)$. Então as saídas $y_i(t)$ constituem as funções amostra de um processo $Y(t)$. O processo $Y(t)$ é também estacionário de segunda ordem: a relação entre as médias de saída e de entrada é dada por (3.27), e a relação entre as autocorrelaçãoes de saída e de entrada expressa-se em (3.34).

3.7.2 Relações Entrada – Saída no Domínio da Frequência

Antes de estudarmos o problema das representações na frequência das relações de entrada – saída no contexto dos sinais aleatórios, é necessário introduzir o conceito de densidade espectral de potência.

3.7.2.1 Densidade Espectral de Potência

Em discussão anterior, ver secção 3.5, concluímos que os processos de interesse teórico e prático pertencem à classe dos sinais de potência. Consideremos então um processo de segunda ordem $X(t)$, estacionário, e cuja potência média pode, de acordo com (3.20), ser escrita na forma

$$\mathbf{P}_X = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^2(t)dt\right\}, \tag{3.35}$$

onde

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & t \in I_T \\ 0, & t \notin I_T \end{cases}, \text{ tendo } I_T \subset \mathbb{R} \text{ comprimento T.} \tag{3.36}$$

Obviamente, as funções amostra $x_T^{(i)}(t)$ do processo $X_T(t)$ têm duração limitada e, portanto, pertencem à classe dos sinais de energia. Portanto, têm transformada de Fourier $\tilde{x}_T^{(i)}(f)$. Seja $X_T(t)$ a variável aleatória que em cada instante t representa a amplitude das amostras do processo $X_T(t)$. Formalmente, podemos então definir a variável aleatória

$$\tilde{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t)e^{-j2\pi ft}dt, \tag{3.37}$$

cujas amostras são

$$\tilde{x}_T^{(i)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^{(i)}(t)e^{-j2\pi ft}dt\,. \tag{3.38}$$

É conhecido que qualquer sinal de energia e a respectiva transformada de Fourier verificam o teorema de Rayleigh, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_T^{(i)}(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^{(i)2}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{x}_T^{(i)}(f)\right|^2 df\ ,$$

onde se teve em conta que estamos a considerar processos reais. A relação anterior reporta-se às amostras das variáveis aleatórias $X_T(t)$ e $\tilde{X}_T(f)$ e, portanto, formalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{X}_T(f)\right|^2 df\,. \tag{3.39}$$

Substituindo (3.39) em (3.35) e rearranjando os diversos termos, obtemos a expressão

$$\mathbf{P}_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left\{ \left| \tilde{X}_T(f) \right|^2 \right\} df ,$$

a qual se pode ainda escrever na forma

$$\mathbf{P}_X = \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(f) df , \tag{3.40}$$

onde

$$G_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left\{ \left| \tilde{X}_T(f) \right|^2 \right\} . \tag{3.41}$$

O ponto importante a salientar desde já é que a potência média total do processo estacionário de segunda ordem $X(t)$ vem dada pela área delimitada por uma função da frequência. Por outro lado, esta função tem, como se pode ver a partir de (3.41), as dimensões físicas de uma potência. Veremos em seguida que $G_X(f)$, tal como definida em (3.41), goza de propriedades muito importantes.

3.7.2.1.1 Teorema de Wiener – Khintchine

Seja $X(t)$ um processo estacionário em sentido lato com função de autocorrelação $R_X(\tau)$. Então $R_X(\tau)$ e $G_X(f)$, tal como definida em (3.41), formam um par de Fourier:

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau , \tag{3.42}$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(f) e^{j2\pi f\tau} df . \tag{3.43}$$

Voltando a (3.41), podemos escrever

$$E\left\{ \left| \tilde{X}_T(f) \right|^2 \right\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) e^{-j2\pi ft} dt \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(\tau) e^{+j2\pi f\tau} d\tau \right\} ,$$

onde podemos substituir $X_T(\cdot)$ por $X(\cdot)$ desde que se ajustem os limites de integração em conformidade. Assim,

$$E\left\{ \left| \tilde{X}_T(f) \right|^2 \right\} = \iint_{D_1} R_X(t-\tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)} dt d\tau , \tag{3.44}$$

onde D_1 é a região de integração ilustrada na Figura 3.3. Fazendo a mudança de variáveis indicada na Figura 3.3, (3.44) toma a forma equivalente

$$E\left\{\left|\tilde{X}_T(f)\right|^2\right\} = \int_{-T}^{0} R_X(\lambda) e^{-j2\pi f\lambda}\left(\int_{-T/2}^{\lambda+T/2} d\mu\right) d\lambda + \int_{0}^{T} R_X(\lambda) e^{-j2\pi f\lambda}\left(\int_{\lambda-T/2}^{T/2} d\mu\right) d\lambda,$$

ou seja,

$$E\left\{\left|\tilde{X}_T(f)\right|^2\right\} = \int_{-T}^{0} (\lambda + T) R_X(\lambda) e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda + \int_{0}^{T} (-\lambda + T) R_X(\lambda) e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda,$$

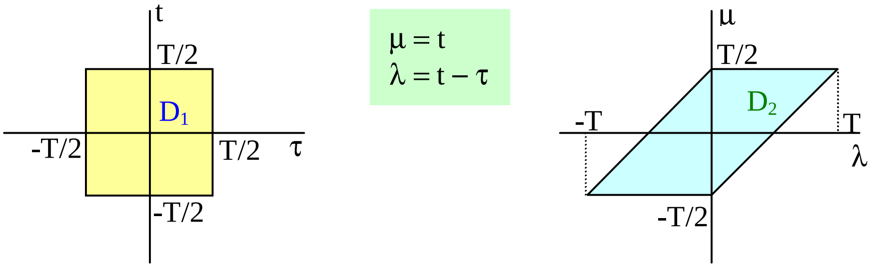

Figura 3.3: Transformação das regiões de integração

e, por fim,

$$E\left\{\left|\tilde{X}_T(f)\right|^2\right\} = T\int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) R_X(\lambda) e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda. \tag{3.45}$$

Assumindo que, quando $T \to \infty$, a função $|\lambda| R_X(\lambda)$ se mantém limitada, então de (3.45) obtém-se imediatamente (3.42) e o teorema de Wiener-Khintchine fica demonstrado.

3.7.2.2 Densidades Espectrais de Potência Cruzadas Entrada – Saída

Aplicando a propriedade da transformada de Fourier da convolução, de (3.31) e (3.32) obtemos de imediato as densidades espectrais de potência cruzadas entre a saída e a entrada e vice – versa.

$$G_{YX}(f) = H(f) G_X(f) \tag{3.46}$$

e

$$G_{XY}(f) = H^*(f) G_X(f), \tag{3.47}$$

respectivamente.

3.7.2.3 Densidade Espectral de Potência da Saída

Procedendo como anteriormente, podemos obter a densidade espectral de potência da saída directamente a partir de (3.34):

$$G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f). \tag{3.48}$$

Exemplo 3.1: Considere o diagrama de blocos da Figura 1.4, onde $H(f)=H_0\Pi\left(\frac{f}{2B_0}\right)$, $G_X(f)=\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ e $B_0 > B$. A potência média total do processo de entrada é, de acordo com (3.40), a área delimitada pela densidade espectral de potência $G_X(f)$, isto é, a área do triângulo: $\mathbf{P}_X = B$. Por outro lado, a densidade espectral de potência da saída $G_Y(f)$, dada por (3.48), adquire a forma ilustrada na Figura 1.4. Portanto, calculando a área delimitada por $G_Y(f)$, obtém-se $\mathbf{P}_Y = H_0{}^2 B_0\left(2-\frac{B_0}{B}\right)$.

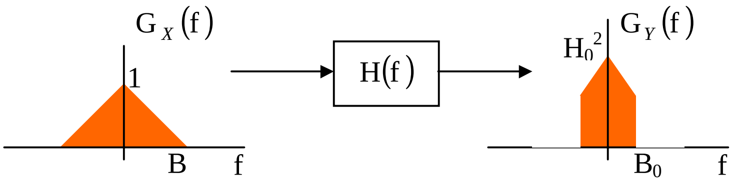

Figura 1.4: Filtragem de um processo estacionário

Tendo em conta que a função $G_Y(f)$ se pode escrever na forma

$$G_Y(f)=H_0{}^2\left[\left(1-\frac{B_0}{B}\right)\Pi\left(\frac{f}{2B_0}\right)+\frac{B_0}{B}\Lambda\left(\frac{f}{B_0}\right)\right],$$

podemos obter a autocorrelação $R_Y(\tau)$ recorrendo a (3.43):

$$R_Y(\tau)=H_0{}^2B_0\left[2\left(1-\frac{B_0}{B}\right)\mathrm{sinc}(2B_0\tau)+\frac{B_0}{B}\mathrm{sinc}^2(B_0\tau)\right].$$

Note-se ainda que

$$R_Y(0)=H_0{}^2B_0\left(2-\frac{B_0}{B}\right)=\mathbf{P}_Y,$$

o que confirma o Facto 3.4, eq. (3.21).

3.8 Caracterização da Soma de Processos Estocásticos

Nesta secção vamos estudar a descrição estatística do processo que resulta da soma de vários processos estocásticos. Para simplificar a apresentação, e porque os resultados que vamos obter são imediatamente generalizáveis para o caso geral, consideraremos apenas o caso da soma de dois processos.

Seja

$$Z(t)=X(t)+Y(t) \tag{3.49}$$

a soma de dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ com médias $m_X(t)$ e $m_Y(t)$, respectivamente. Da Def. 3.2, eq. (3.1), e atendendo ainda à linearidade do operador valor expectável, resulta o seguinte:

Facto 3.6: A média da soma de dois processos estocásticos é a soma das médias das parcelas

$$\mathrm{m}_Z(\mathrm{t}) = \mathrm{m}_X(\mathrm{t}) + \mathrm{m}_Y(\mathrm{t}). \tag{3.50}$$

Se ambos os processos $X(\mathrm{t})$ e $Y(\mathrm{t})$ forem estacionários na média, então a soma é também estacionária na média.

Usando as Def. (3.3), eq. (3.2), Def. (3.11), eq. (3.23), e a linearidade do operador valor expectável, a autocorrelação de $Z(\mathrm{t})$ é

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_Z(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) &= \mathrm{R}_X(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) + \mathrm{R}_{XY}(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) \\ &\quad + \mathrm{R}_{YX}(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) + \mathrm{R}_Y(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) \end{aligned}; \tag{3.51}$$

Se $X(\mathrm{t})$ e $Y(\mathrm{t})$ forem estacionários na correlação, então

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_Z(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) &= \mathrm{R}_X(\tau) + \mathrm{R}_{XY}(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) \\ &\quad + \mathrm{R}_{YX}(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) + \mathrm{R}_Y(\tau) \end{aligned}, \tag{3.52}$$

isto é, o facto de $X(\mathrm{t})$ e $Y(\mathrm{t})$ serem estacionários na correlação não é suficiente para que a sua soma também o seja. No entanto, se forem conjuntamente estacionários, então R_{XY} e R_{YX} dependem apenas da diferença entre os argumentos, (3.52) toma a forma

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_Z(\tau) &= \mathrm{R}_X(\tau) + \mathrm{R}_{XY}(\tau) \\ &\quad + \mathrm{R}_{YX}(\tau) + \mathrm{R}_Y(\tau) \end{aligned}, \tag{3.53}$$

e o processo $Z(\mathrm{t})$ é também estacionário na correlação. Ou seja:

Facto 3.7: O processo $Z(\mathrm{t}) = X(\mathrm{t}) + Y(\mathrm{t})$ é estacionário na correlação se os processos $X(\mathrm{t})$ e $Y(\mathrm{t})$ forem conjuntamento estacionários de segunda ordem.

Se em (3.53) usarmos o Facto 3.4, eq. (3.21), concluímos que

$$\mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_X + \mathrm{R}_{XY}(0) + \mathrm{R}_{YX}(0) + \mathbf{P}_Y, \tag{3.54}$$

ficando claro que a potência da soma de dois processos não é, em geral, igual à soma das potências das parcelas.

Facto 3.8: Se os processos $X(\mathrm{t})$ e $Y(\mathrm{t})$ forem ortogonais, então da Def. 3.10 concluímos que

$$\forall \mathrm{t}, \tau \;\; \mathrm{R}_{XY}(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) = \mathrm{R}_{YX}(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) = 0$$

e de (3.51) vem

$$\mathrm{R}_Z(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) = \mathrm{R}_X(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau) + \mathrm{R}_Y(\mathrm{t}, \mathrm{t}-\tau). \tag{3.55}$$

Facto 3.9: No caso de processos estacionários ortogonais, (3.53) e (3.54) tomam a forma particular

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) \tag{3.56}$$

e

$$\mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_X + \mathbf{P}_Y, \tag{3.57}$$

respectivamente. Por outro lado, de (3.56) e (3.42) resulta ainda

$$G_Z(f) = G_X(f) + G_Y(f). \tag{3.58}$$

Em resumo:

- a correlação do processo soma é a soma das correlações das parcelas apenas no caso de estas serem processos ortogonais;
- no caso de processos conjuntamente estacionários, a potência média (correlação/densidade espectral de potência) do processo soma é a soma das potências médias (correlações/densidades espectrais de potência) das parcelas apenas no caso de estas serem processos ortogonais.

3.9 Processos Gaussianos

Def. 3.13- Considere-se a funcional

$$Y = \int_{T_\alpha}^{T_\beta} g(t)X(t)dt, \tag{3.59}$$

onde $g(t)$ é tal que $E\{Y^2\}$ é finito, e $X(t)$ é a variável aleatória que modela a amplitude do processo $X(t)$ definido no intervalo $T_\alpha \le t \le T_\beta$. Se Y for uma variável aleatória gaussiana, então o processo $X(t)$ é gaussiano.

Individualizar os processos gaussianos relativamente a outras classes de processos estocásticos encontra justificação em duas ordens de razões. A primeira, pragmática, tem a ver com as propriedades particulares dos processos gaussianos que facilitam o tratamento analítico de muitos problemas. A segunda resulta do facto de os processos físicos que se pretendem modelar serem tais que o teorema do limite central é aplicável e, portanto, o modelo gaussiano torna-se o mais adequado.

Os processos gaussianos gozam de um conjunto de propriedades, das quais salientaremos as que se seguem.

P1. Seja $X(t)$ o processo de entrada de um sistema linear estável. Se $X(t)$ for um processo gaussiano, então o processo de saída $Y(t)$ é também um processo gaussiano.

P2. Seja $\{X(t_k)\}_{k=1}^{n}$ o conjunto de variáveis aleatórias que modelam observações do processo $X(t)$ nos instantes $\{t_k\}_{k=1}^{n}$. Se o processo $X(t)$ for gaussiano, então para qualquer valor de n aquelas variáveis aleatórias são conjuntamente gaussianas, sendo completamente definidas pela especificação das médias $\{m_X(t_k) = E\{X(t_k)\}\}_{k=1}^{n}$ e das funções de correlação $\{R_X(t_k - t_i) = E\{X(t_k)X(t_i)\}\}_{i,k=1}^{n}$.

P3. Se um processo gaussiano for estacionário em sentido lato, então é também estacionário em sentido estrito.

P4. Seja $\{X(t_k)\}_{k=1}^{n}$ o conjunto de variáveis aleatórias que modelam observações do processo gaussiano $X(t)$ nos instantes $\{t_k\}_{k=1}^{n}$. Se aquelas variáveis aleatórias forem incorrelacionadas, isto é,

$$C_{X(t_k)X(t_i)} = 0,\ i \neq k = 1,2,\ldots,n$$

então são também estatisticamente independentes.

Seja $Y(t)$ o processo de saída de um siatema linear cuja entrada é um processo gaussiano $X(t)$. Então, podemos escrever

$$Y(t) = \int_{T_\alpha}^{T_\beta} h(t,\tau)X(\tau)d\tau,\ T_\gamma \le t \le T_\delta. \qquad (3.60)$$

Na relação anterior, $h(t,\tau)$ é a resposta no instante t do sistema linear quando a entrada é um impulso de Dirac que ocorre no instante τ. Assume-se que $h(t,\tau)$ é tal que $E\{Y^2(t)\} < \infty,\ T_\gamma \le t \le T_\delta$. Tendo em conta a Def. 3.13, é claro que $Y(t),\ T_\gamma \le t \le T_\delta$, é uma variável aleatória gaussiana. Para mostrar que $Y(t)$ é um processo gaussiano basta mostrar que qualquer funcional

$$Z = \int_{T\gamma}^{T\delta} g_Y(t)Y(t)dt\ , \qquad (3.61)$$

onde $g_Y(t)$ é tal que $E\{Z^2\} < \infty$, é uma variável aleatória gaussiana. Usando (3.60), podemos escrever

$$Z = \int_{T_\gamma}^{T_\delta} g_Y(t)\int_{T_\alpha}^{T_\beta} h(t,\tau)X(\tau)d\tau dt$$

ou

$$Z = \int_{T_\alpha}^{T_\beta} g(\tau)X(\tau)d\tau\ , \qquad (3.62)$$

onde se definiu

$$g(\tau) = \int_{T\gamma}^{T\delta} g_Y(t)h(t,\tau)dt\ .$$

Uma vez que $X(t)$ é um processo gaussiano, então, por definição, Z é uma variável aleatória gaussiana. A propriedade P1 fica assim demonstrada. A propriedade P2 resulta directamente da definição de processo gaussiano e implica de imediato as propriedades P3 e P4.

3.10 Modelos de Fontes de Informação

Iremos considerar dois tipos fundamentais de fontes de informação: analógicas em tempo contínuo e digitais em tempo discreto ou contínuo. Consideraremos ainda o caso de processos digitais em tempo contínuo.

3.10.1 Fontes Analógicas em Tempo Contínuo

A Figura 1.5 mostra uma função amostra gerada por uma fonte analógica em tempo contínuo. Neste caso, a fonte é modelada por um processo estocástico $X(t)$ cuja amplitude é modelada por uma variável aleatória $X(t),\ t \in \mathbb{R}$.

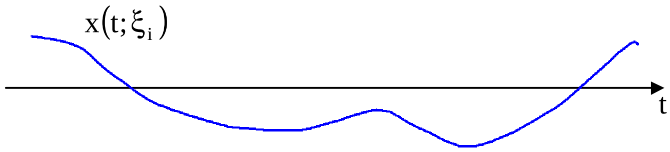

Figura 1.5:Amostra gerada por uma fonte analógica em tempo contínuo

Em geral, assumiremos que o processo $X(t)$ é gaussiano, estacionário, com média nula e correlação conhecida. Naturalmente, a respectiva densidade espectral de potência, sendo uma representação na frequência, determina a largura de banda da fonte.

3.10.2 Fontes Digitais em Tempo Discreto

Neste caso, a fonte digital é modelada por um processo $X(t)$ especificado pelo conjunto de variáveis aleatórias discretas $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), \ldots$ definidas nos instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \in \mathbb{R}$. Tipicamente, consideraremos variáveis aleatórias binárias definidas em instantes distribuídos uniformemente ao longo da recta real. A Figura 1.6 ilustra uma sequência binária aleatória …1001110… passível de ser gerada por uma fonte do tipo aqui considerado.

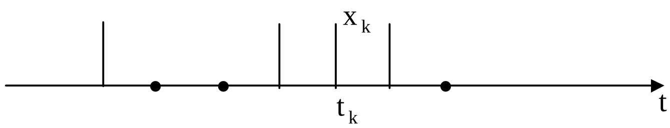

Figura 1.6: Amostra gerada por uma fonte digital em tempo discreto

3.10.3 Fontes Digitais em Tempo Contínuo

Este tipo de fontes resulta do caso anterior quando se faz uso de um qualquer esquema de sinalização. Este pode consistir no uso de impulsos $p(t)$ do tipo rectangular com duração igual ao espaçamento temporal entre ocorrências consecutivas de símbolos. A Figura 1.7 mostra um sinal amostra de uma fonte do tipo aqui considerado quando se aplica o esquema de sinalização referido à sequência aleatória da Figura 1.6.

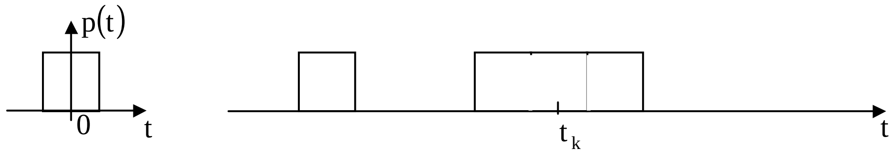

Figura 1.7: Amostra gerada por uma fonte digital em tempo contínuo

3.11 Ruído Branco Gaussiano

O termo ruído branco é usado para indicar o processo estocástico caracterizado pelo facto de todas as suas componentes de frequência terem a mesma potência, isto é, o espectro (ou densidade espectral) de potência é constante. Este é um conceito paralelo ao de luz branca, a qual é constituída por uma mistura de todas as cores.

Def. 3.14- Um processo $X(t)$ é um processo branco se tiver um espectro de potência constante, isto é,

$$G_X(f) = \frac{\eta}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.63}$$

A importância dos processo brancos na prática prende-se ao facto de o ruído térmico ter um espectro de potência aproximadamente constante numa banda de frequências muito larga, da ordem de 10^{12} Hz. Portanto, para as larguras de banda dos sinais e sistemas que iremos considerar, o ruído térmico é adequadamente modelado como um processo branco. Por outro lado, o processo físico (movimento aleatório de electrões por efeito térmico) de geração do ruído térmico leva a que, por recurso ao teorema do limite central, seja modelado como um processo gaussiano.

Nos estudos que iremos desenvolver, consideraremos então que o ruído térmico é modelado como um processo branco gaussiano, cujo espectro de potência é dado por (3.63) e cuja correlação é, por consequência, dada por

$$R_X(t) = \frac{\eta}{2}\delta(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.64}$$

Como comentário final, chama-se a atenção para o facto de um processo branco não ter significado do ponto de vista físico. Com efeito, de (3.63) conclui-se que a potência média total é infinita. Portanto, deve sempre ter-se em conta que este tipo de processos são usados como modelos abstractos de processos físicos com propriedades semelhantes.