Localização em Robótica Móvel

Odometria

Maria Isabel Ribeiro
mir@isr.ist.utl.pt
Instituto Superior Técnico (IST)
Instituto de Sistemas e Robótica (ISR)
Av.Rovisco Pais, 1
1049-001 Lisboa
PORTUGAL

Outubro.1999

All the rights reserved

Classificação de Métodos de Localização

- **Localização com Medidas Relativas**
  - Odometria
  - Navegação Inercial

  } Dead-Reckoning

- **Localização com Medidas Absolutas**
  - Faróis activos
  - Reconhecimento de marcas artificiais
  - Reconhecimento de marcas naturais
  - Emparelhamento com o modelo

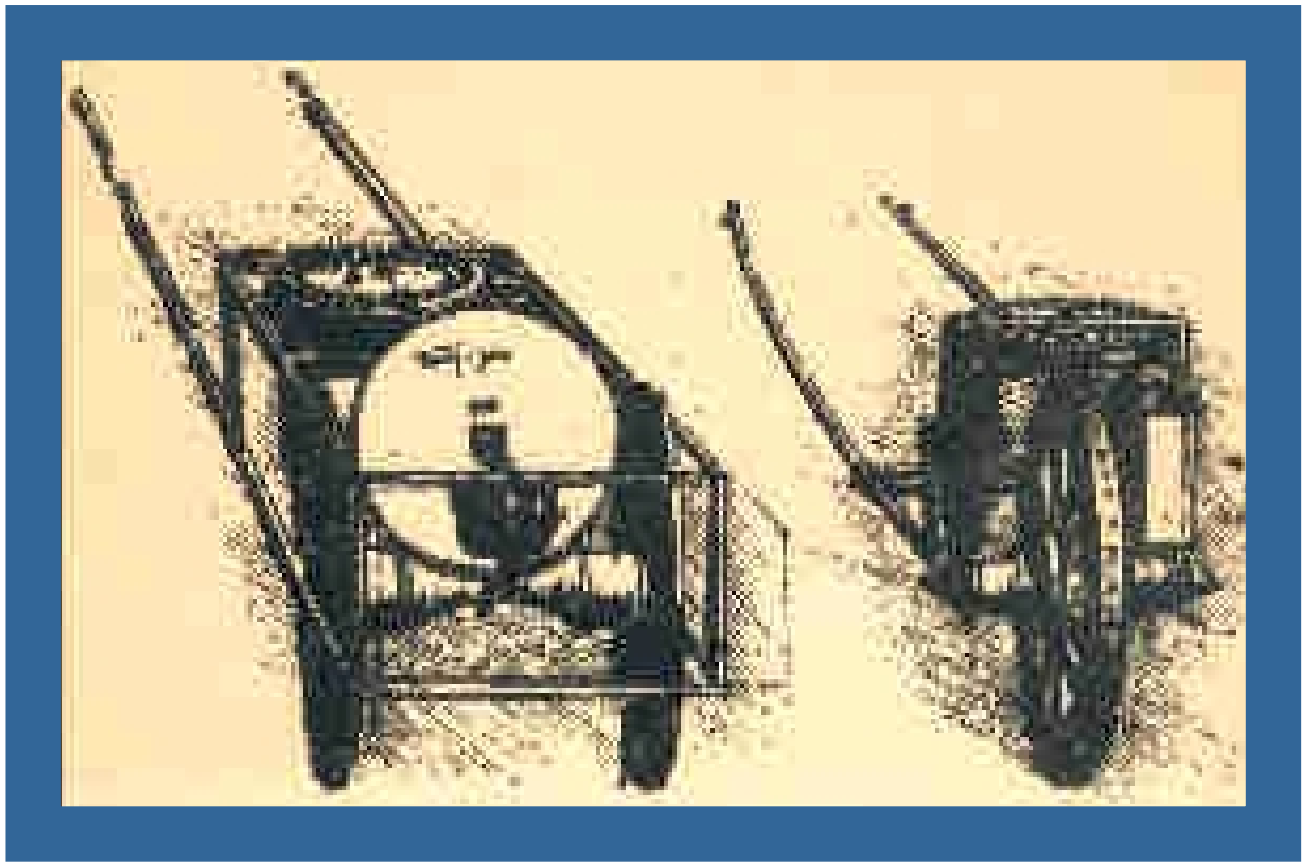
- **Localização com Medidas Relativas + Medidas Absolutas**

Odometria

- **Determinação da localização do robot móvel através da observação e integração consecutiva do movimento das rodas**

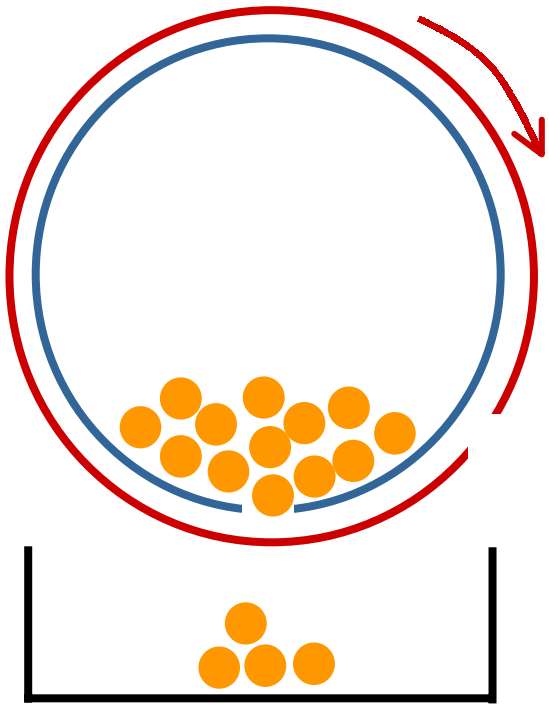
- **ODÓMETROS -** Instrumentos que medem a distância percorrida por veículos.
  - **Encoders - sensores mais usuais**
- **Vitruvius** descreveu o conceito no séc. 1 ac.
- **Leonardo da Vinci** (1500) construi um aparato que usava pedras para calcular a distância percorrida**.**

O odómetro de Leonardo da Vinci

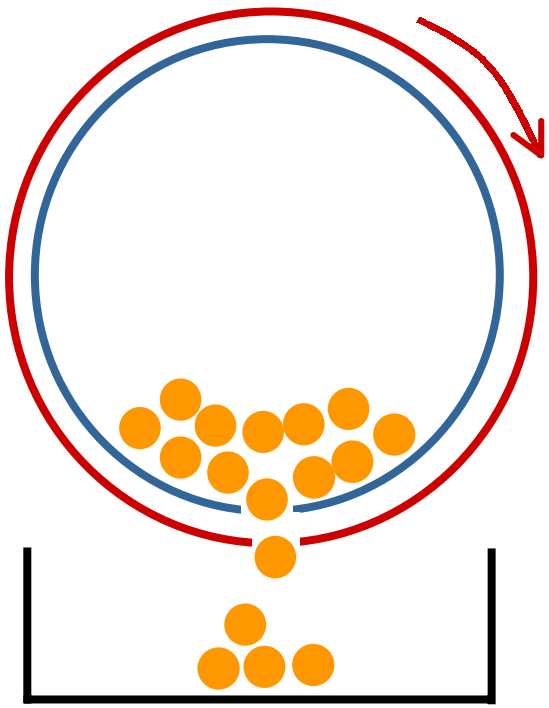


- Codex Atlanticus - Biblioteca Ambrosiana - Roma, Itália

O odómetro de Leonardo da Vinci



- **Contentor**, fixo à estrutura do veículo, cheio com **pedras** e com um orifício na parte inferior.
- A rotação de uma das rodas faz rodar um **tambor** em torno do contentor.
- Tambor tem um orifício do mesmo tamanho do existente no contentor.
- Depois de um certo número de rotações da roda, os dois orifícios coincidem e uma pedra cai, sendo recolhida numa **caixa**.
- O número de pedras recolhidas na caixa num intervalo de tempo permite estimar a distância percorrida.



Fontes de erro na odometria

Integração de informação sobre movimentos incrementais → acumulação de erros

- **Erros sistemáticos**
  - são característicos do robot e/ou dos sensores
    - desigual diâmetro ou desalinhamento das rodas,
    - diâmetro das rodas diferente do valor nominal,
    - incerteza sobre o ponto de contacto da roda
  - em solos regulares contribuem mais fortemente para o erro total do que os erros não sistemáticos
  - são graves porque são fonte constante de erros aditivos

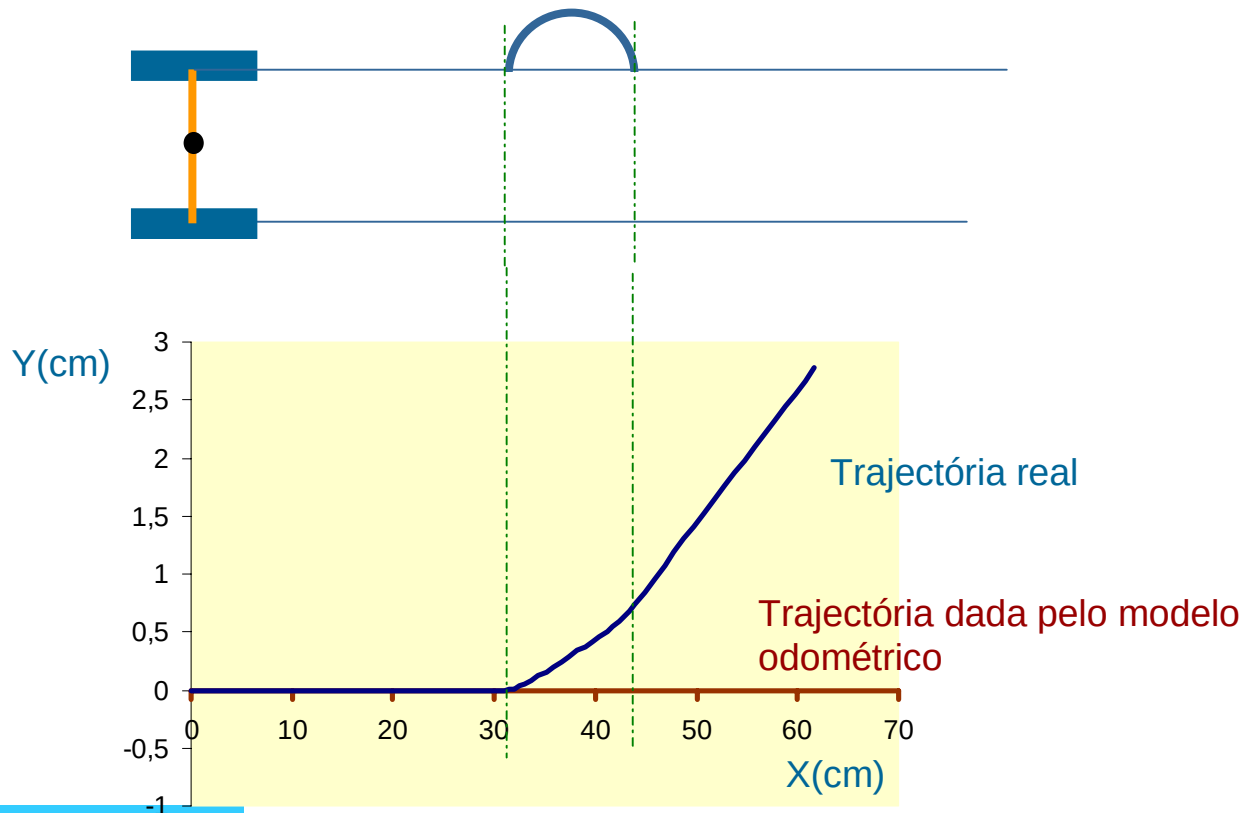
Fontes de erro na odometria

Integração de informação sobre movimentos incrementais → acumulação de erros

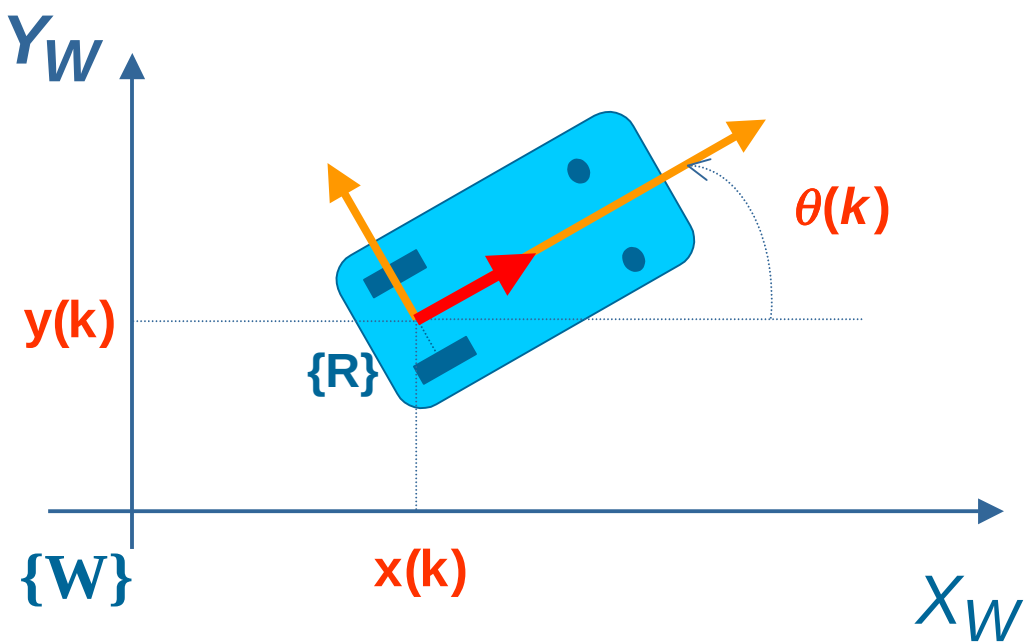
- **Erros não sistemáticos**
  - são característicos da relação do robot com o ambiente
    - movimento sobre solos não uniformes (rugosos),
    - movimento sobre obstáculos inesperados no solo,
    - escorregamento das rodas
      - solo escorregadio
      - grandes acelerações do veículo
      - rotações rápidas
      - …….
  - em solos irregulares estes podem ser os erros dominantes

Irregularidades no pavimento

- **Comando de movimento** - velocidade igual em ambas as rodas
- Robot móvel com controlo diferencial



NOTAÇÃO



$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}$$

posição e orientação

- A localização refere-se ao ponto médio do eixo entre as duas rodas motoras
- Eixo com comprimento L

Modelo da odometria

- **Descreve a evolução temporal da localização do robot móvel como função de**
  - entrada U(k),
  - v(k) - fonte de ruído (deformações e escorregamento das rodas, vibrações, ...) - assumida como N(0,Q(k))

$$\mathbf{X(k+1) = f(X(k), U(k)) + v(k)}$$

$$\mathbf{U(k) = [\Delta D(k) \quad \Delta\theta(k)]^T}$$

- **ΔD(k)** - distância percorrida pela origem do referencial do robot no intervalo $[t_k, t_{k+1}[$
- **$\Delta\theta$(k)** - variação da orientação no mesmo intervalo

Estimativa da Localização por Odometria

- **Dados:**
  - Modelo do sistema $X(k+1) = f(X(k), \Delta D(k), \Delta\theta(k)) + v(k)$
  - Estimativa da localização no instante k $\hat{X}(k)$
  - Incerteza associada $\Sigma_X(k)$
  - Leituras de odometria (estimativas) $\Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k)$
  - Caracterização do erro $Q(k)$

- **Pergunta:**
  - qual é a estimativa da localização no instante k+1? $\hat{X}(k+1)$
  - qual é a incerteza associada? $\Sigma_X(k+1)$

Estimativa da Localização por Odometria

- Dadas as leituras dos odómetros $\Delta D_e(k),\ \Delta D_d(k)$

$$\Delta D_e(k),\ \Delta D_d(k) \xrightarrow{\ ?\ } \Delta D(k),\ \Delta\theta(k)$$

$$\begin{cases} \Delta D(k) = \dfrac{\Delta D_d(k) + \Delta D_e(k)}{2} \\ \Delta\theta(k) = \dfrac{\Delta D_d(k) - \Delta D_e(k)}{L} \end{cases}$$

- Quais são as características do ruído de estado?

$$v(k) \sim N(0, Q(k))$$

$$Q(k) = \begin{bmatrix} Q_1(k) & 0 & 0 \\ 0 & Q_2(k) & 0 \\ 0 & 0 & Q_3(k) \end{bmatrix}$$

- O que é a função f( ) ?

$$X(k+1) = f(X(k), \Delta D(k), \Delta\theta(k)) + v(k)$$

Caracterização do erro

- **Crowley - ICRA92**

$$Q(k) = \begin{bmatrix} Q_{11}(k) & & \\ & Q_{22}(k) & \\ & & Q_{33}(k) \end{bmatrix}$$

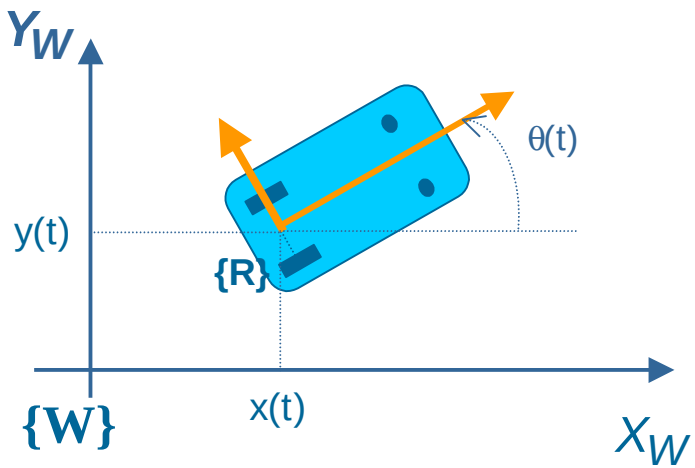
$$Q_{11}(k) = K_D \left| \Delta D(k) \cos\theta(k) \right|$$
$$Q_{22}(k) = K_D \left| \Delta D(k) \sin\theta(k) \right|$$
$$Q_{33}(k) = K_{D\theta} \left| \Delta D(k) \right| + K_\theta \left| \Delta\theta(k) \right|$$

- K_D - coeficiente de drift de translacção de odometria relativo a ΔD (m^2/m)
- $K_{D\theta}$ - coeficiente de drift de rotação de odometria relativo a ΔD (rad^2/m)
- K_θ - coeficiente de drift de rotação de odometria relativo a $\Delta\theta$ (rad^2/rad)

Valores típicos

- K_D= 0.001 m^2/m
- $K_{D\theta}$ =0.0003 rad^2/m
- K_θ = 0.001 rad^2/rad

Modelo cinemático



$v_d(t)$ - velocidade da roda direita

$v_e(t)$ - velocidade da roda esquerda

L - comprimento do eixo entre as duas rodas motoras

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{v_d(t) + v_e(t)}{2}\cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) = \dfrac{v_d(t) + v_e(t)}{2}\sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) = \dfrac{v_d(t) - v_e(t)}{L} \end{cases}$$

Relaciona:

- as velocidades das rodas com
- as velocidades (linear e angular) do referencial do veículo no referencial global

Modelo cinemático

- Discretização do modelo contínuo

Para $t \geq t_k$

$$x(t) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t} \frac{v_d(\tau)+v_e(\tau)}{2} \cos(\theta(\tau))d\tau$$

$$y(t) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t} \frac{v_d(\tau)+v_e(\tau)}{2} \sin(\theta(\tau))d\tau$$

$$\theta(t) = \theta(t_k) + \int_{t_k}^{t} \frac{v_d(\tau)-v_e(\tau)}{L} d\tau$$

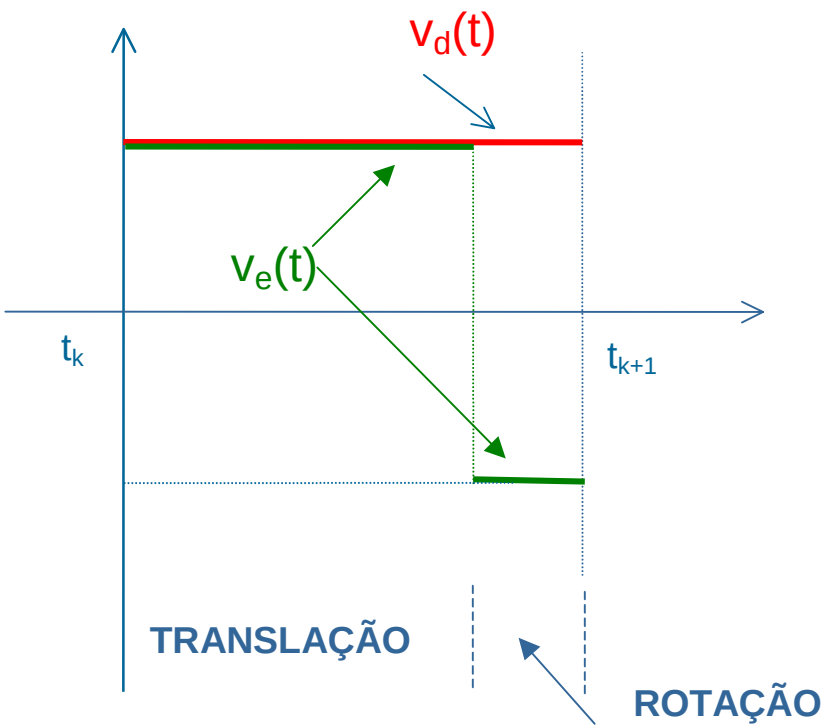
$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{v_d(\tau)+v_e(\tau)}{2} \cos(\theta(\tau))d\tau$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{v_d(\tau)+v_e(\tau)}{2} \sin(\theta(\tau))d\tau$$

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{v_d(\tau)-v_e(\tau)}{L} d\tau$$

Modelo cinemático

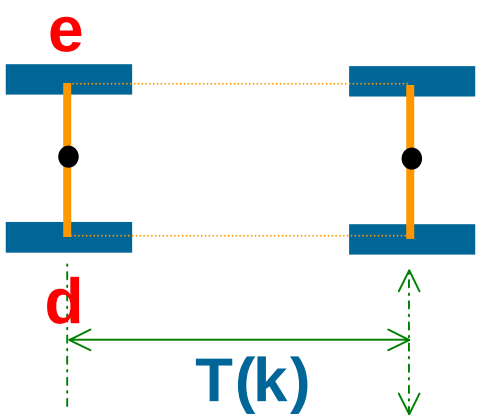
- Como variam, no intervalo $[t_k,t_{k+1}[$ as velocidades $v_d(t)$ e $v_e(t)$?

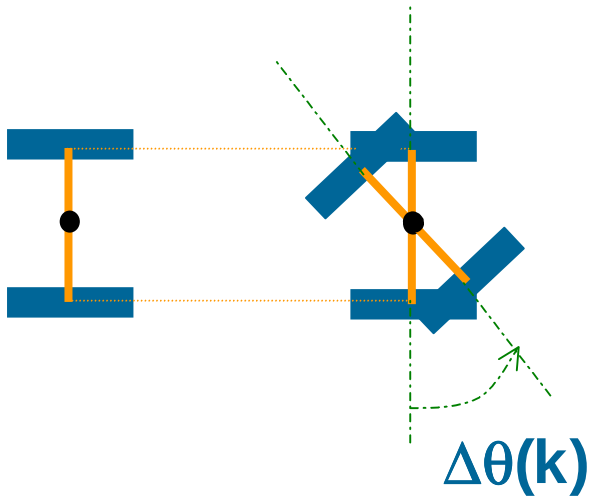


TRANSLAÇÃO seguida de uma ROTAÇÃO sobre o eixo de rotação

f(.) - Hipóteses simplificativas

- **TRANSLAÇÃO seguida de uma ROTAÇÃO sobre o eixo de rotação**

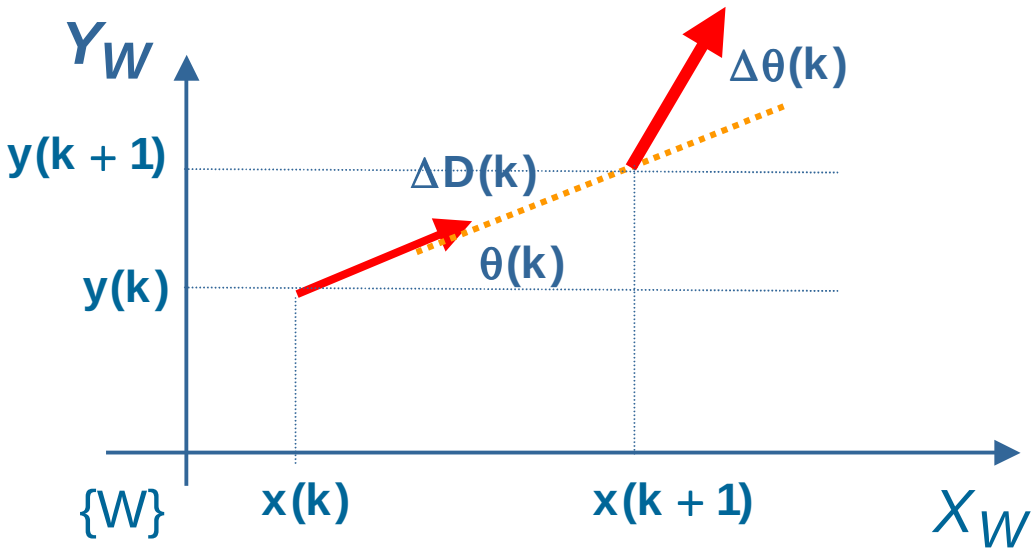




$$\begin{cases} \Delta D_e(k) = T(k) - \Delta\theta(k)\dfrac{L}{2} \\ \Delta D_d(k) = T(k) + \Delta\theta(k)\dfrac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta D(k) = \dfrac{\Delta D_d(k) + \Delta D_e(k)}{2} = T(k) \\ \Delta\theta(k) = \dfrac{\Delta D_d(k) - \Delta D_e(k)}{L} = \Delta\theta(k) \end{cases}$$

f(.)-Hipóteses simplificativas

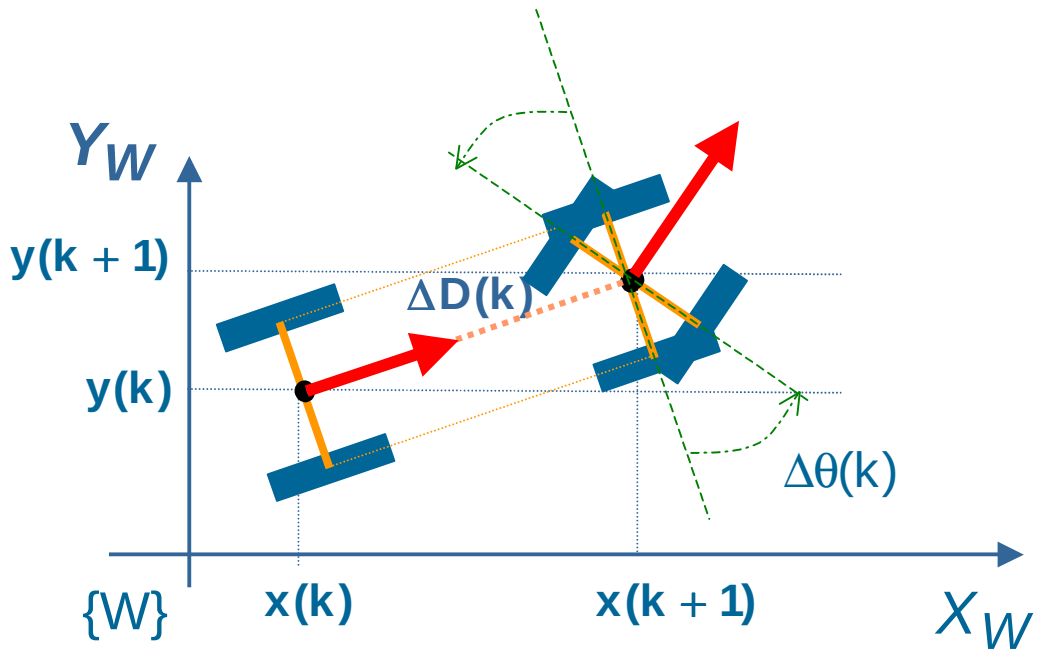
- **TRANSLAÇÃO seguida de uma ROTAÇÃO sobre o eixo de rotação**



$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k)\cos(\theta(k)) \\ y(k) + \Delta D(k)\sin(\theta(k)) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix}}_{f(X(k),\Delta D(k),\Delta\theta(k))} + v(k)$$

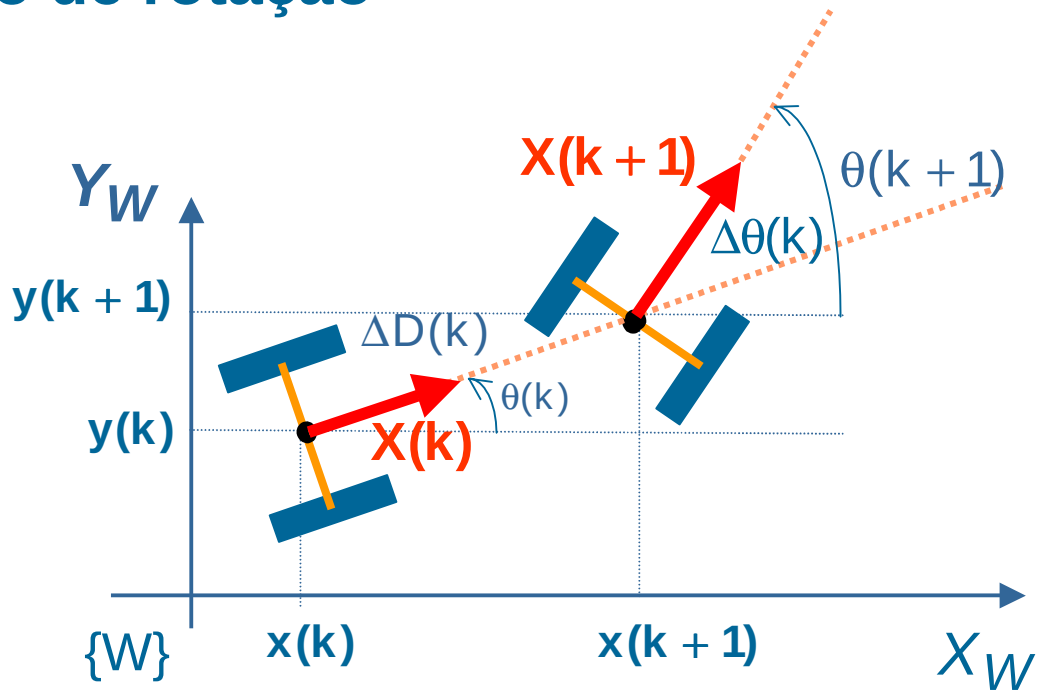
f(.) - Hipóteses simplificativas

- **TRANSLAÇÃO seguida de uma ROTAÇÃO sobre o eixo de rotação**



f(.)-Hipótese simplificativa

- **TRANSLAÇÃO seguida de uma ROTAÇÃO sobre o eixo de rotação**



$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k)\cos(\theta(k)) \\ y(k) + \Delta D(k)\sin(\theta(k)) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix}}_{f(X(k),\Delta D(k),\Delta\theta(k))} + v(k)$$

Modelo cinemático

- **Como variam, no intervalo $[t_k, t_{k+1}[$ as velocidades $v_d(t)$ e $v_e(t)$?**

Trajectória segundo um ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

$$\frac{v_d(t) + v_e(t)}{2} = wR$$

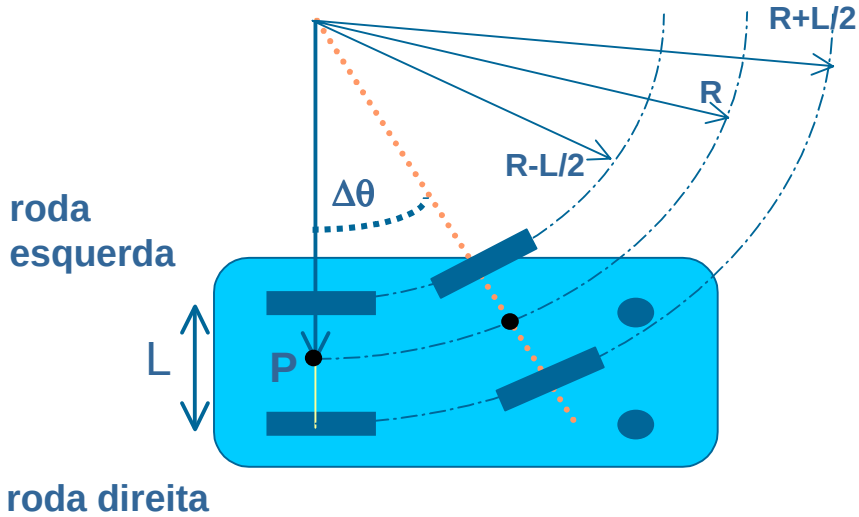
$$\frac{v_d(t) - v_e(t)}{L} = w$$

R = raio da circunferência

w = velocidade angular

f(.)-Hipóteses simplificativas

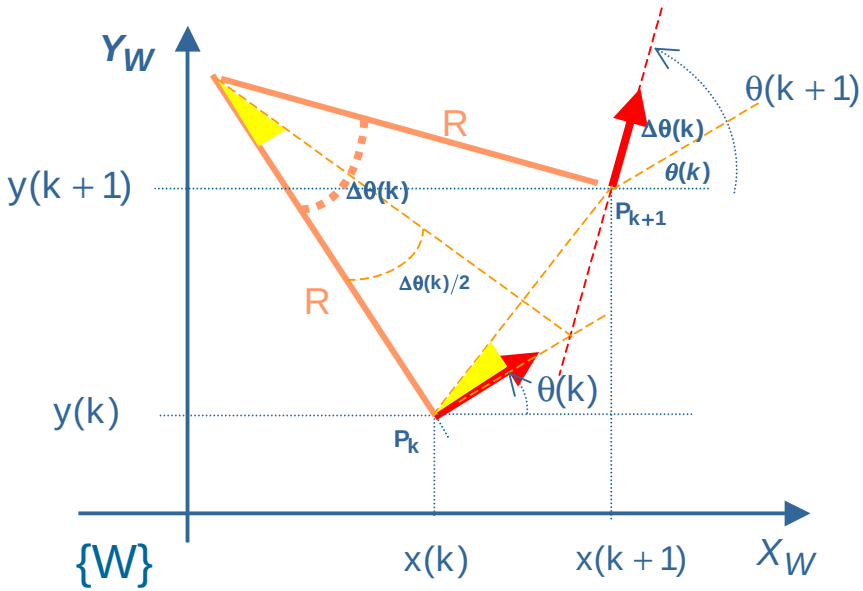
- **Trajectória = arco de circunferência de raio R**



$$\begin{cases} \Delta D_e(k) = \Delta\theta(k)\left(R - \dfrac{L}{2}\right) \\ \Delta D_d(k) = \Delta\theta(k)\left(R + \dfrac{L}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\theta(k) = \dfrac{\Delta D_d(k) - \Delta D_e(k)}{L} \\ \Delta D(k) = \Delta\theta(k)R = \dfrac{\Delta D_d(k) + \Delta D_e(k)}{2} \end{cases}$$

f(.)-Hipóteses simplificativas

- **Trajectória = arco de circunferência de raio R**



$$\frac{\overline{P_kP_{k+1}}}{\text{arc}P_kP_{k+1}} = \frac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2}$$

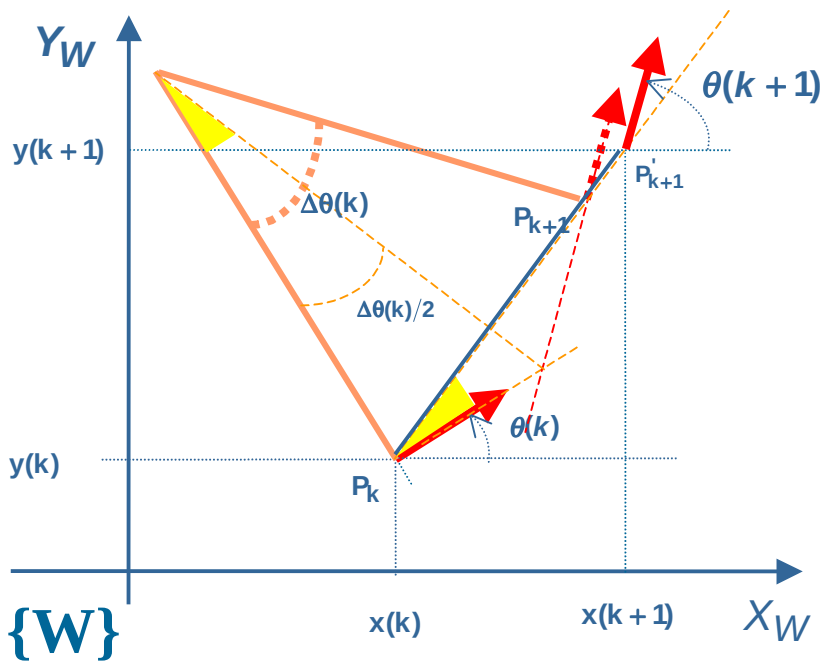
$$\Downarrow$$

$$\overline{P_kP_{k+1}} = \Delta D(k)\,\frac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2}$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k)\dfrac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2}\cos(\theta(k)+\Delta\theta(k)/2) \\ y(k) + \Delta D(k)\dfrac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2}\sin(\theta(k)+\Delta\theta(k)/2) \\ \theta(k)+\Delta\theta(k) \end{bmatrix} + v(k)$$

f(.)-Hipóteses simplificativas

- **Trajectória = arbitrária**
- **Aproximar P_{k+1} por P'_{k+1} com $\overline{P_k P'_{k+1}} = \Delta D(k)$**



$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k)\cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)/2) \\ y(k) + \Delta D(k)\sin(\theta(k) + \Delta\theta(k)/2) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix} + v(k)$$

Estimativa no instante k+1

- **Estimativa**

$$\hat{X}(k+1) = f(\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k))$$

- **Incerteza - matriz de covariância (com aproximações e hipóteses subjacentes)**
  - Expansão de $f(X(k), \Delta D, \Delta\theta)$ em série de Taylor em torno de $\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k)$
  - Desprezando termos de ordem superior
  - $X(k), \Delta D$ *e* $\Delta\theta$ são incorrelacionados

$$\Sigma_X(k+1) \cong \frac{dF}{dX}\Sigma_X(k)\frac{dF^T}{dX} + Q(k)$$

$$\frac{dF}{dX} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=\hat{X}(k), \Delta D=\Delta\hat{D}(k), \Delta\theta=\Delta\hat{\theta}(k)}$$

Estimativa no instante k+1

- **Estimativa**

$$\hat{X}(k+1) = f(\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k))$$

- **Incerteza - matriz de covariância** **(com aproximações e hipóteses subjacentes)**

$$\Sigma_X(k+1) = E\left[\left(X(k+1) - \hat{X}(k+1)\right)\left(X(k+1) - \hat{X}(k+1)\right)^T\right]$$

  - Expansão de $f(X(k), \Delta D, \Delta\theta)$ em série de Taylor em torno de $\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k)$
  - Desprezando termos de ordem superior

Estimativa no instante k+1

- **Estimativa**

$$\hat{X}(k+1) = f(\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k))$$

- **Incerteza - matriz de covariância** **(com aproximações e hipóteses subjacentes)**

$$\Sigma_X(k+1) = \frac{dF}{dX}\Sigma_X(k)\frac{dF^T}{dX} + Q(k) + \frac{dF}{d\Delta D}\Sigma_{\Delta D}(k)\frac{dF^T}{d\Delta D} + \frac{dF}{d\Delta\theta}\Sigma_{\Delta\theta}(k)\frac{dF^T}{d\Delta\theta} +$$

$$\cancel{+ \text{termos cruzados de } 1^a \text{ ordem}}$$

- $X(k), \Delta D$ *e* $\Delta\theta$ são incorrelacionados

Estimativa no instante k+1

- **Estimativa**

$$\hat{X}(k+1) = f(\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k))$$

- **Incerteza - matriz de covariância** **(com aproximações e hipóteses subjacentes)**

$$\Sigma_X(k+1) = \frac{dF}{dX}\Sigma_X(k)\frac{dF^T}{dX} + Q(k) + \cancel{\frac{dF}{d\Delta D}\Sigma_{\Delta D}(k)\frac{dF^T}{d\Delta D} + \frac{dF}{d\Delta\theta}\Sigma_{\Delta\theta}(k)\frac{dF^T}{d\Delta\theta}}$$

são muito pequenos

Estimativa no instante k+1

- **Estimativa**

$$\hat{X}(k+1) = f(\hat{X}(k), \Delta\hat{D}(k), \Delta\hat{\theta}(k))$$

- **Incerteza - matriz de covariância** **(com aproximações e hipóteses subjacentes)**

$$\Sigma_X(k+1) \cong \frac{dF}{dX}\Sigma_X(k)\frac{dF^T}{dX} + Q(k)$$

$$\frac{dF}{dX} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=\hat{X}(k),\Delta D=\Delta\hat{D}(k),\Delta\theta=\Delta\hat{\theta}(k)}$$

Significado da incerteza

$$X(k) \sim N(\hat{X}(k), \Sigma_X(k))$$

- Dados $\hat{X}(k)$ e $\Sigma_X(k)$ é possível definir o lugar geométrico dos pontos onde, com **uma dada probabilidade**, se situam os valores da variável aleatória.

  - Elipsóide com centro em $\hat{X}(k)$ e semi-eixos proporcionais aos valores singulares de $\Sigma_X(k)$

$$\underbrace{\left(X(k) - \hat{X}(k)\right)^T \Sigma_X(k)^{-1} \left(X(k) - \hat{X}(k)\right)}_{\text{Distribuição } \chi^2 \text{ com 3 graus de liberdade}} \leq \gamma$$

Significado da incerteza

$$X(k) \sim N(\hat{X}(k), \Sigma_X(k))$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} \qquad \hat{X}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{y}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix} \qquad \Sigma_X(k) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\theta} \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{y\theta} & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

Dados $\hat{X}(k)$ e $\Sigma_X(k)$ é possível definir o lugar geométrico dos pontos onde, com **uma dada probabilidade**, se situam os valores da variável aleatória.

Elipsóide com centro em $\hat{X}(k)$ e semi-eixos proporcionais aos valores próprios de $\Sigma_X(k)$

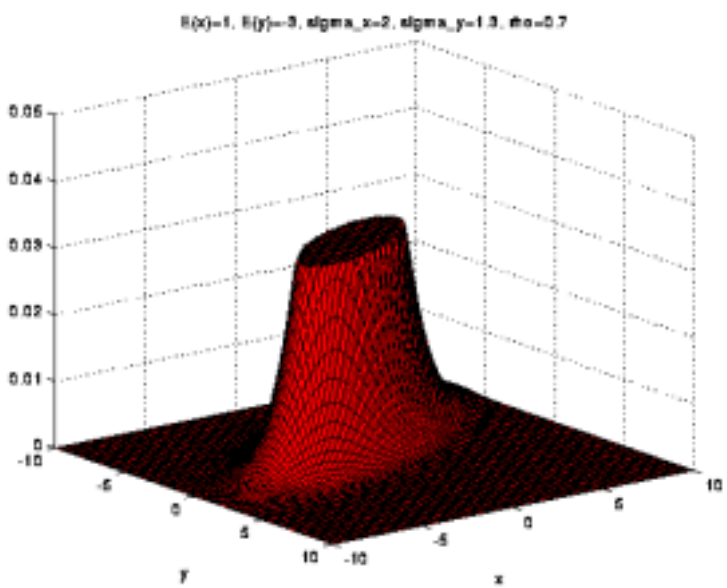
Posição $\quad P(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \qquad \hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{y}(k) \end{bmatrix} \qquad \Sigma_P(k) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$

Orientação $\quad \theta(k) \qquad \hat{\theta}(k) \qquad \sigma_\theta^2$

Significado da incerteza

Posição $P(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$

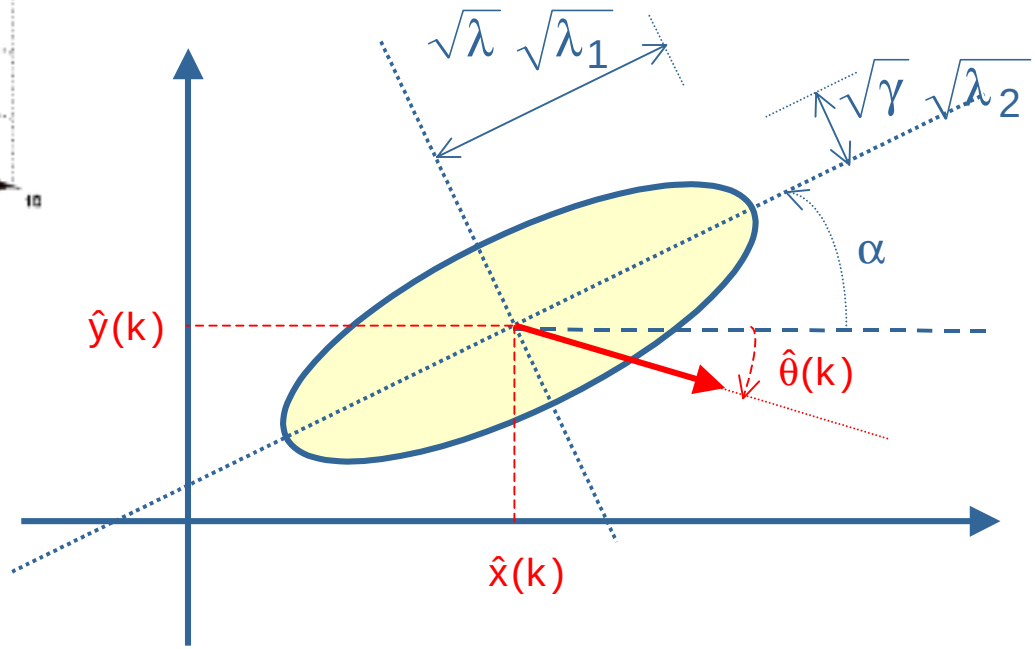
$$P(k) \sim N(\hat{P}(k), \Sigma_P(k))$$



$$\left(P(k) - \hat{P}(k)\right)^T \Sigma_P(k)^{-1} \left(P(k) - \hat{P}(k)\right) \leq \gamma$$

Probabilidade = 90%

m=2 K=4.61



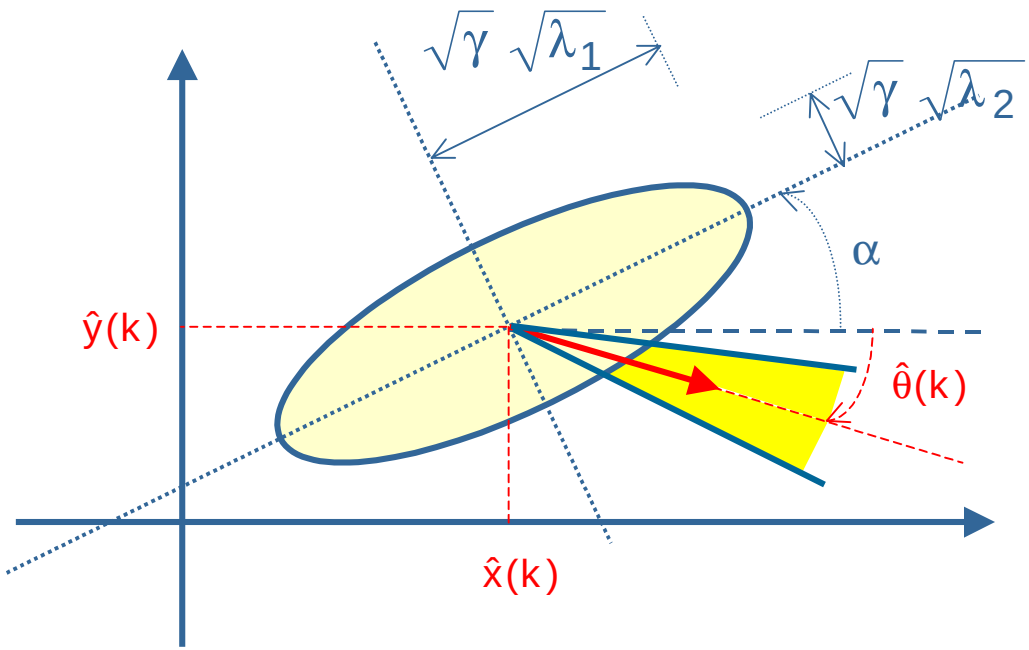
λ_1, λ_2

Valores próprios de $\Sigma p(k)$

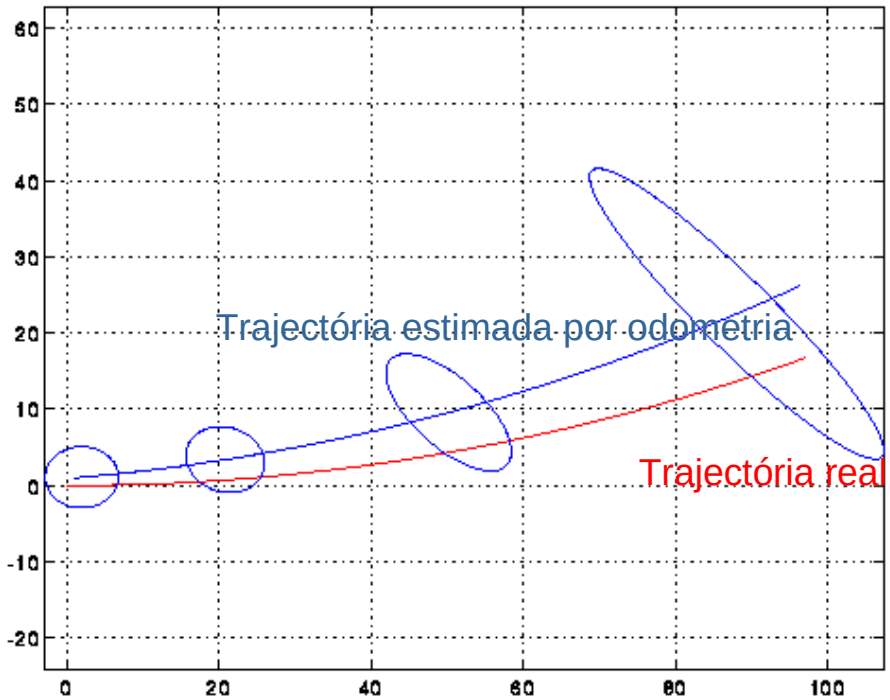
Significado da incerteza

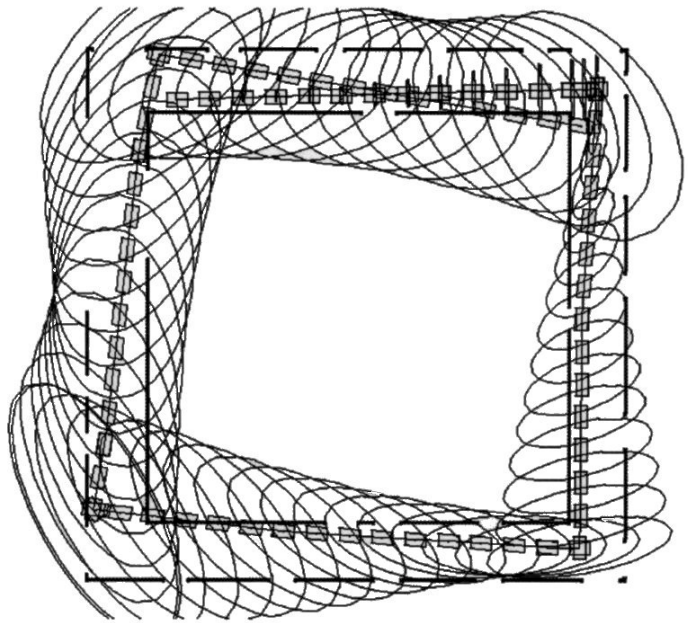
Posição $P(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$ $\quad P(k) \sim N(\hat{P}(k), \Sigma_P(k))$

Orientação $\theta(k)$ $\quad \theta(k) \sim N(\hat{\theta}(k), \sigma_\theta^2(k))$



Odometria - Experiências





Elipses a 90% de probabilidade

Elipses a 95% de probabilidade

Trajectória real = incrementos angulares de 0.2º

Estimativa inicial odometria x=1cm, y=1cm,θ=5º