- ***Identifique com nome e número*** todas as folhas do exame
- ***Resolva problemas distintos em folhas separadas***
- ***Justifique*** os seus cálculos e respostas
- **Duração: 3 horas**

Questão 1 Considere um corpo rígido que roda em torno de um eixo, sob a acção de um binário aplicado *T*. Sejam θ e $\omega = d\theta/dt$ respectivamente a posição e a velocidade angular do corpo em torno desse eixo. Suponha que o atrito de rotação é nulo. Neste caso, a dinâmica do sistema (denominado *P*) é dada por $T = J\, d^2\theta/dt^2$, onde *J* denota o momento de inércia do corpo. Supondo que $J=1$ nas unidades adequadas, o sistema é descrito pela função de transferência

$$P(s) = \Theta(s)/T(s) = 1/s^2$$

Pretende-se controlar a posição angular do sistema *P*. Para isso, investigam-se os dois esquemas descritos a seguir.

Esquema 1. Suponha que é possível manipular directamente o binário *T*. Considere a proposta de sistema de controlo por retroacção da Figura 1, onde *r* denota o sinal de referência e *Kp* é um simples ganho proporcional.

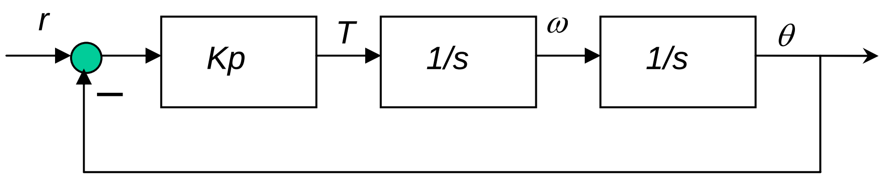

Figura 1. Sistema de Controlo E1.

Q.1.1 Prove, utlizando o traçado do diagrama do lugar geométrico das raízes (“Root-Locus”), que o sistema em malha fechada não é estável para qualquer valor de $Kp > 0$. Justifique detalhadamente o traçado do diagrama.

Q.1.2 Explique, com base num raciocínio simples de ordem física, a razão pela qual o sistema descrito na alínea anterior não é estável.

Esquema 2. Considere agora o sistema de controlo da Figura 2, que difere do sistema da Figura 1 pela inclusão de uma retroacção local de velocidade (introdução de atrito artificial).

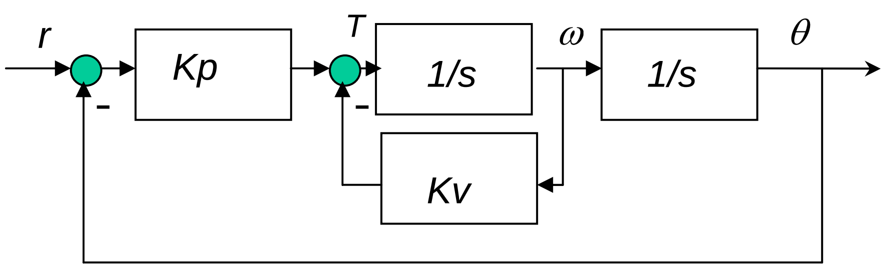

Figura 2. Sistema de Controlo E2.

Q.1.3 Prove justificadamente que o sistema de controlo resultante é estável para todos os valores de $Kp>0$ e $Kv>0$. **Responda a esta questão de duas maneiras**: i) calcule a função de transferência total $\Theta(s)/R(s)$ e examine o denominador, e ii) faça uma aplicação do traçado do “Root-Locus” em função do ganho $Kp>0$, adoptando $Kv>0$ como um parâmetro positivo (variável). Justifique detalhadamente o traçado do “Root-Locus”.

Q.1.4 Nos esquemas anteriores, assumiu-se que o sensor de posição angular é ideal, isto é, a sua função de transferência é o operador identidade (sensor com largura de banda infinita). Considere agora o caso realista em que o sensor tem a dinâmica

$$Z(s)/\Theta(s)=p/(s+p);\ p>0.$$

Note que neste caso o sensor é modelado por um sistema passa-baixo de primeira ordem com largura de banda $p>0$. É intuitivo que *o comportamento do sistema resultante (Figura 3) deve aproximar de modo muito fiel o comportamento do sistema da Figura 2 quando p é grande*. Para investigar esta afirmação, faça $Kv=1$ e **trace o "Root-Locus" do sistema para $p=100\ rads^{-1}$ (sensor com largura de banda muito grande) e $p=0.1\ rads^{-1}$ (sensor com largura de banda muito pequena)** Comente àcerca da estabilidade e desempenho do sistema para os dois casos de *p*. *Sugestão: examine em detalhe a localização dos polos dominantes do sistema em malha fechada.*

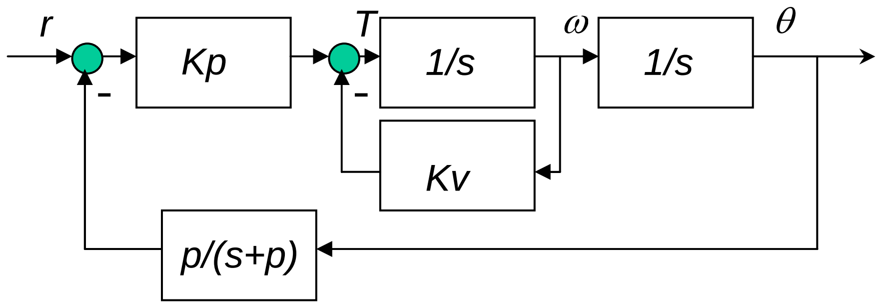

Figura 3. Sistema de Controlo com dinâmica do sensor

Q.1.5 Para $Kv=1$, sejam *p* e *Kp* tais que o sistema de controlo da Figura 3 é estável. Prove que o sistema exibe erro estático de posição igual a zero. Justifique o resultado intuitivamente.

Questão 2 Considere o sistema de controlo digital representado na Figura 4:

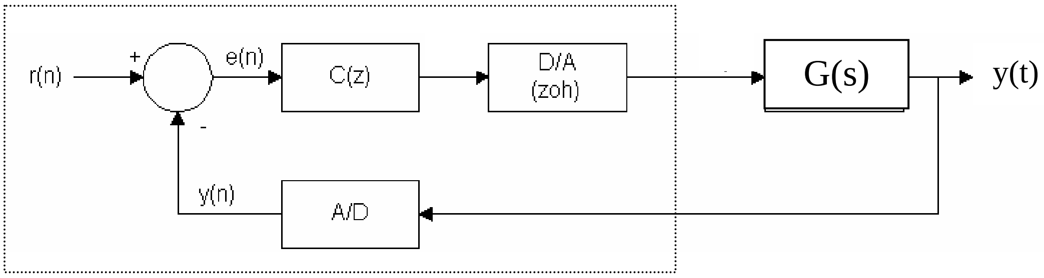

Figura.4

Q.2.1 Mostre que o equivalente discreto do sistema contínuo $G(s)=\dfrac{1}{s}$ precedido do retentor de ordem zero (ZOH) é $G(z)=\dfrac{T}{z-1}$ sendo T o período de amostragem

Q.2.2 Pretende-se que a resposta em tempo contínuo *y(t)* a um escalão unitário não apresente sobreelevação e corresponda a polo duplo em $s=-1$. Determine o controlador discreto *C(z)* mais simples que permite realizar aquele objectivo, e calcule os seus parâmetros. Faça T = 0,5 seg

Q.2.3 Mantendo constantes os parâmetros do controlador *C(z)* calculados na alínea anterior, comente os efeitos qualitativos da variação do intervalo de amostragem T sobre as características dinâmicas da resposta y(t) e a estabilidade do sistema em malha fechada. Apoie a sua análise no *root-locus*.

Questão 3 Considere o sistema de controlo da Figura 5, onde

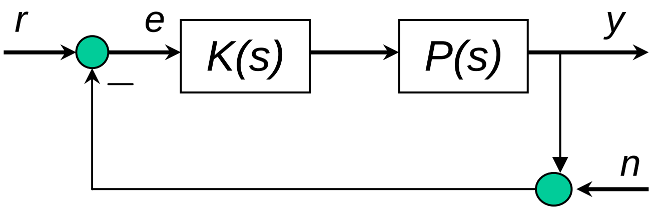

Figura 5. Sistema de Controlo

P(s) e K(s) representam respectivamente as funções de transferência do sistema a controlar e do controlador. No esquema,

$$P(s) = \frac{10}{(s+10)}$$

representa a função de transferência simplificada de um motor de corrente contínua com entrada em tensão *u* e saída em velocidade de rotação *y*. Suponha que para além do sinal de referência *r* o sistema está também sujeito à acção de ruído *n* no sensor que mede a saída *y*.

Q.3.1 Projecte um controlador K(s) com ***atraso de fase***, e com efeito integral, da forma

$$K(s) = k\frac{1}{s}\frac{s+z}{s+p}\ ; k,z,p > 0;\ z > p$$

com *k*, *z* e *p* a determinar, tal que o sistema em malha fechada seja estável e satisfaça os seguintes requisitos:

i) Erro estacionário de seguimento de sinais constantes de comando *r (erro estático de posição)* igual a 0.

ii) Erro estacionário de seguimento de sinais de comando tipo rampa (isto é, *r(t)=t*) menor ou igual a 10^{-3}.

iii) Seguimento de sinais de referência *r(.)* na gama de frequências *[0, 0.1] rad* s^{-1} com erro menor ou igual a *-60 db.*

iv) Atenuação do ruído *n*(.) na gama de frequências *[100, 1000] rad* s^{-1} de pelo menos *-20 db*

v) Margem de fase P_M maior ou igual a 45^o

vi) Margem de ganho positiva G^+_M maior ou igual a +40 db.

***Sugestões*:** i) comece por determinar um controlador simples com ganho integral que satisfaça i), ii) e iii). Depois, modifique o controlador de modo a satisfazer os restantes requisitos por escolha adequada do zero *z* e polo *p*.

Justifique todos os passos*. *Em particular, trace com rigor os diagramas de Bode assimptóticos e de Nyquist necessários.

Q3.2 Para o controlador determinado em *3.1*, calcule a diminuição de ganho tolerável até que o sistema em malha fechada se torne instável.

Q3.3 Suponha que existe um atraso $\tau>0$ na transmissão de informação entre o controlador *K(s)* e o sistema a controlar *P(s).* Para o sistema de controlo determinado em *3.1*, determine o atraso máximo tolerado a partir do qual o sistema se torna instável. Sugestão: note que a função de transferência de um atraso puro é $exp(-\tau s)$ e que quando $s=j\omega$ este factor se traduz num atraso de fase puro que varia linearmente com a frequência. Utilize o Diagrama de Bode e o critério de Nyquist.