Instituto Superior Técnico
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo

2003/2004

Análise e Projecto em Frequência

Realizado por :

F. M. Garcia[1] - Março de 2003

J. Gaspar[1] - Novembro de 2003

[1]Instituto de Sistemas e Robótica/Instituto Superior Técnico

I – Notas preliminares

O relatório da componente teórica do trabalho deve ser entregue no fim da aula de laboratório. O relatório da componente experimental pode ser entregue até 1 semana após a realização do trabalho na caixa de correio da Secção de Sistemas e Controlo (Torre Norte, 5 piso, em frente à sala 5.17). Entregas fora deste prazo serão penalizadas.

II – Objectivos

- Análise da dinâmica de um sistema mecânico.
- Rejeição de perturbações de baixa frequência na saída.
- Rejeição de ruído de alta frequência nos sensores.
- Dimensionamento de controladores na frequência.
- Root-locus, diagrama de Nyquist e estabilidade.

III – Introdução

Neste trabalho estuda-se um sistema físico composto por massas ligadas entre si por molas e forças de atrito. Numa primeira fase, determina-se o modelo matemático da dinâmica do sistema. Este modelo é depois simplificado recorrendo à aproximação de corpo único. Pretende-se finalmente, a partir do modelo simplificado do sistema real, projectar um sistema de controlo que garanta a rejeição de perturbações de baixa frequência na saída e do ruído de alta frequência nos sensores.

IV – Sistema físico objecto de estudo

Considere o sistema mecânico apresentado na Figura 1. O sistema é composto por duas massas, m_1 e m_2 ligadas por uma mola e uma força de atrito. A massa m_1 é actuada pela força exterior f e pela força de atrito $b\dot{x}$ devida ao escorregamento ao longo do pavimento. O modelo do sistema é:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -b\dot{x}_1 - b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k(x_1 - x_2) + f \\ m_2\ddot{x}_2 = -b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{1}$$

onde x_1, x_2 representam as posições das massas, b, b_2 são constantes de atrito dinâmico e k é a constante de elasticidade da mola.

Para o dimensionamento de controladores será utilizado um modelo aproximado baseado na hipótese de que as duas massas estão praticamente solidárias e portanto se comportam como um corpo rígido. Em particular $\ddot{x}_2(t) \equiv \ddot{x}_1(t) = \ddot{x}(t)$, e desta forma o sistema total é descrito de forma simples por uma massa $m = m_1 + m_2$ que se move sobre um plano

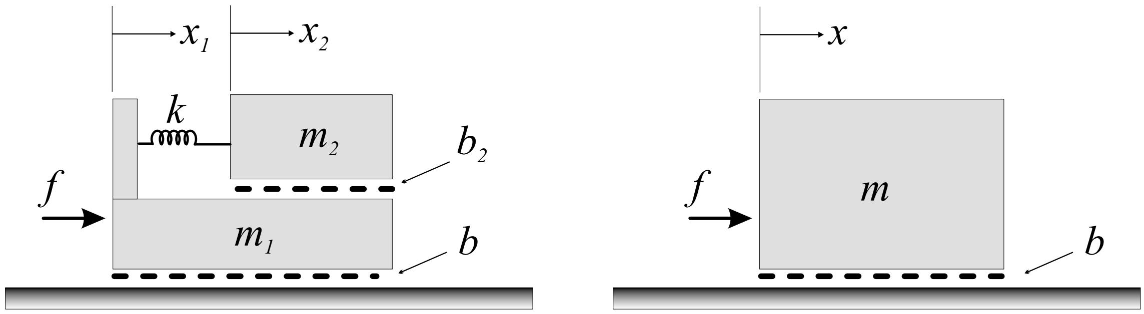

Figura 1: Sistema de duas massas ligadas por mola e atrito e sistema simplificado constituído por uma única massa.

por acção de uma força f num pavimento com coeficiente de atrito b:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + f. \tag{2}$$

Nas alíneas seguintes admita que $m = 0.1Kg$ e $b = 10Nm^{-1}s$.

V – Trabalho de preparação prévio, a efectuar antes da sessão de laboratório

1) Considerando o modelo simplificado (eq.2), determine $\dot{x}(t)$ em regime estacionário quando a força f é um escalão unitário.

2) Determine a função de transferência $G(s)$ do modelo simplificado (eq.2) que relaciona a posição x da massa m com a força f aplicada à entrada.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 2 representa a um sistema de controlo de $G(s)$, sendo $C(s)$ o controlador, $w(t)$ a perturbação de baixa frequência na posição da massa, $n(t)$ o ruído de alta frequência no sensor que mede a posição da massa, $e(t)$ o sinal de erro, $x(t)$ a posição da massa, $r(t)$ a referência a seguir e $u(t)$ o sinal de controlo.

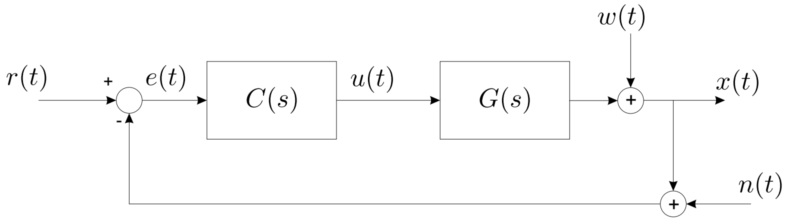

Figura 2: Sistema de controlo para seguimento, e rejeição de perturbações à saída e de ruído nos sensores

3) Mostre que qualquer que seja o controlador $C(s)$ sem zeros na origem, o erro estático de posição é nulo, desde que o sistema em cadeia fechada seja estável.

4) Calcule as funções de transferência $H_1(s) = X(s)/W(s)$ e $H_2(s) = X(s)/N(s)$.

5) Considere que o controlador deve ser projectado de forma a cumprir os seguintes objectivos:

- **Baixa frequência** - Para $\omega \leq \omega_1$, então $|H_1(j\omega)| \leq \epsilon_1$.
- **Alta frequência** - Para $\omega \geq \omega_2$, então $|H_2(j\omega)| \leq \epsilon_2$.

Estas especificações permitem atenuar a influência de perturbações de baixa frequência à saída do sistema (como, por exemplo, o efeito da temperatura exterior num sistema de aquecimento ou o efeito do vento num avião), bem como o ruído de alta frequência (térmico e/ou electromagnético) nos sensores que consistem geralmente em dispositivos electrónicos.

Admitindo que, para $\omega \leq \omega_1$, se tem $|C(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$, e para $\omega \geq \omega_2$, se tem $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$, estabeleça, de uma forma aproximada, as condições a impor ao ganho de malha [2] $|C(j\omega)G(j\omega)|$ de forma a que se cumpram as especificações desejadas. Repare que as aproximações referidas fazem sentido pois, em muitas situações de interesse (como aquela em estudo neste trabalho), o ganho de malha é passa-baixo, tomando assim valores elevados na baixa frequência e baixos na alta frequência.

6) Considere $\omega_1 = 1\ rads^{-1}$, $\omega_2 = 1000\ rads^{-1}$, $\epsilon_1 = 0.01$ e $\epsilon_2 = 0.001$; Apresente, em folha de papel semilogarítmico as regiões onde o diagrama de Bode de amplitude do ganho de malha **não** se pode situar (regiões de exclusão), de forma a que sejam cumpridas as especificações desejadas.

7) Seja $C(s) = K$ (controlador proporcional), com $K > 0$. Baseando-se no diagrama de Bode assimptótico de amplitude do ganho de malha $|KG(j\omega)|$, determine K_{min}, correspondendo ao valor mínimo de K para o qual a especificação de baixa frequência é cumprida. Desenhe o diagrama de Bode assimptótico do ganho de malha com $C(s) = K_{min}$ na mesma folha de papel semilogarítmico onde representou as regiões de exclusão relativas às especificações pedidas. Mostre que não é possível, com qualquer controlador proporcional, cumprir ambas as especificações desejadas.

8) Considere agora $C(s) = Ka/(s + a)$. Analisando o diagrama de Bode assimptótico do ganho de malha, escolha um valor de a de forma a que ambas as especificações sejam cumpridas, utilizando $K = K_{min}$.

[2] No projecto de controladores, o "ganho de malha" é a designação usual para a resposta em frequência da função de transferência em cadeia aberta

Para o valor de a escolhido, trace o *root-locus* do sistema $R(s) \rightarrowtail X(s)$ em função de K. Indique no *root-locus* a localização dos pólos para $K = K_{min}$. Esboce a resposta do sistema em cadeia fechada a um escalão unitário na referência e comente o controlador estudado.

Esboce o diagrama de Nyquist de $C(s).G(s)$. Calcule a margem de ganho e represente-a no diagrama de Nyquist. Comente a seguinte afirmação: "a margem de ganho indica um limite à atenuação que pode ser realizada sobre as perturbações na saída (ϵ_1)".

9) Repita as questões 6), 7) e 8) para $\epsilon_1 = 0.001$ e $\epsilon_2 = 0.01$ (utilize uma folha de papel semilogarítmico diferente para esta pergunta). Comente os resultados obtidos. Considere ainda o controlador

$$C(s) = \frac{K\alpha(s+\beta)}{\beta(s+\alpha)}.$$

Dimensione os valores de α e β e K de forma a que o sistema em cadeia fechada cumpra as especificações pedidas. Esboce o diagrama de Bode assimptótico de amplitude do ganho de malha $|C(j\omega)G(j\omega)|$ em papel semilogarítmico, juntamente com as zonas de exclusão definidas por ϵ_1 e ϵ_2.

Trace o root-locus do sistema $R(s) \rightarrowtail X(s)$ em função do parâmetro K. Indique no root-locus a localização dos pólos em cadeia fechada para o valor de K escolhido e explique as vantagens deste controlador face ao controlador apenas com um pólo.

Esboce o diagrama de Nyquist de $C(s).G(s)$. Obtenha a margem de fase, Φ_M e a respectiva frequência ω_M utilizando os comandos de Matlab `margin` e `zpk`. Represente a margem de fase no diagrama de Nyquist. Supondo que entre o controlador, $C(s)$ e o sistema, $G(s)$ existe um atraso constante de Δ seg, obtenha uma expressão para a nova margem de fase, Φ_{M2} em função de Φ_M, ω_Φ e Δ [3]. Comente a seguinte afirmação: "o atraso afecta somente a fase do *ganho de malha*".

VI – Guia do trabalho a desenvolver durante a sessão de laboratório

1) (Respostas em frequência) Para os controladores estudados nas alíneas 7), 8) e 9) da secção V –, utilize a função `bode` do Matlab para desenhar os diagramas de Bode de amplitude das funções de transferência em cadeia fechada $W(s) \rightarrowtail X(s)$ e $N(s) \rightarrowtail X(s)$. Para cada caso, corrija os valores dos parâmetros escolhidos dos controladores de forma a que as especificações sejam cumpridas relativamente:

1. aos diagramas de Bode reais e não apenas, como foi pedido na parte teórica, em relação aos diagramas de Bode assimptóticos.

[3] O atraso é uma função de transferência $Y(s) = e^{-s\Delta}.X(s)$. O valor de Δ será determinado no laboratório.

2. às funções de transferência $W(s) \rightarrowtail X(s)$ e $N(s) \rightarrowtail X(s)$ em vez das aproximações feitas através do ganho de malha.

Comente os resultados.

2) (Respostas no tempo) Nos computadores do laboratório encontrará um bloco de Simulink que representa o sistema real.

1. Compare a resposta ao escalão do sistema real com o sistema aproximado utilizado para o dimensionamento dos vários controladores.
2. Implemente o sistema em cadeia fechada da Figura 2, substituindo $G(s)$ pelo bloco Simulink do sistema real. Faça as experiências que achar relevantes de forma a confirmar, através de respostas no domínio do tempo, os resultados calculados na parte teórica.

3) (Diagrama de Nyquist e margem de fase) Determine aproximadamente a margem de fase do sistema através da introdução de várias sinusóides no sistema em malha aberta (controlador dimensionado em $V.9$ + modelo do sistema real). Recordar que a margem de fase se observa a partir da desfasagem entre as sinusóides de entrada e saída na frequência para a qual o ganho é unitário.

Sendo w_{MF} a frequência à qual foi observada a margem de fase, observe também os ganhos e desfasagens nas frequências $2.w_{MF}$ e $w_{MF}/2$. Esboce um diagrama de Nyquist local baseado nos três pares de valores (ganho, desfasagem) obtidos.

Nos laboratórios encontrará também um bloco que representa o sistema real, mas com um atraso constante, Δ embebido na função de transferência. Considerando ainda o controlador dimensionado em $V.9$, repita os passos anteriores para determinar a margem de fase e esboçar um diagrama de Nyquist local (sobrepor com o diagrama de Nyquist local anterior). Com base nos dados adquiridos, qual o atraso máximo que pode ser adicionado no sistema real que já tem um atraso Δ embebido?

Comente os efeitos da introdução de um atraso constante no *ganho de malha* e na malha fechada tendo em atenção por exemplo o último controlador realizado.

VII – Relatório

O relatório deve ser elaborado em duas partes, correspondendo cada uma às secções V – e VI – deste enunciado. As respostas devem ser sucintas. Na parte teórica, todos os resultados apresentados devem ser devidamente justificados. Os comentários da parte experimental devem ser apoiados nas respostas observadas e/ou nos resultados teóricos. Relembra-se que no final do semestre poderá ser realizada uma discussão oral dos trabalhos de laboratório.