Problemas de Sinais e Sistemas
Transformada de Laplace

1. Considere o sinal $x(t) = e^{-5t}u(t-1)$ cuja transformada de Laplace é $X(s)$.

   (a) Calcule $X(s)$ e especifique a sua região de convergência.

   (b) Determine os valores dos números finitos A e t_0 tal que a transformada de Laplace $G(s)$ de $g(t) = Ae^{-5t}u(-t-t_0)$ tenha a mesma forma algébrica de $X(s)$. Qual é a região de convergência correspondente a $G(s)$?

2. Para a transformada de Laplace de:

$$x(t) = \begin{cases} e^t \sin(2t) & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

   indique a localização dos pólos e a sua região de convergência.

3. Um sinal $x(t)$ absolutamente integrável tem um pólo em $s = 2$. Responda às seguintes questões:

   (a) Pode $x(t)$ ser de duração finita?

   (b) Pode $x(t)$ ser um sinal lateral esquerdo?

   (c) Pode $x(t)$ ser um sinal lateral direito?

   (d) Pode $x(t)$ ser um sinal bi-lateral?

4. Quantos sinais têm uma transformada de Laplace que se pode expressar como:

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

   na sua região de convergência?

5. Dado que o sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$ tem como transformada de Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad Re(s) > Re(-a)$$

   determine a transformada de Laplace inversa de:

$$Y(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12}, \quad Re(s) > -3$$

6. Determine a transformada de Laplace, a respectiva região de convergência e o diagrama de pólos e zeros de cada um dos seguintes sinais:

   (a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

   (b) $x(t) = te^{-2|t|}$

   (c) $x(t) = \delta(t) + u(t)$

   (d) $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

7. Determine a transformada de Laplace inversa para cada uma das equações e respectiva resgião de convergência:

   (a) $X_1(s) = \frac{1}{s^2+9}$, $Re(s) > 0$
   (b) $X_2(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9}$, $Re(s) < -1$
   (c) $X_3(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2-s+1}$, $Re(s) > 1/2$

8. Considere um sinal $y(t)$ que está relacionado com $x_1(t)$ e $x_2(t)$ por:

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$

   onde $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ e $x_2(t) = e^{-3t}u(t)$. Sabendo que:

$$e^{-at}u(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad Re(s) > -a$$

   use as propriedades da transformada de Laplace para determinar $Y(s)$.

9. Considere um sistema contínuo, linear e invariante no tempo com entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$ e resposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t)$:

   (a) Determine a transformada de Laplace de $x(t)$ e de $h(t)$.
   (b) Usando a propriedade da convolução, determine a transformada de Laplace $Y(s)$ do sinal de saída.
   (c) Determine o sinal de saída $y(t)$.
   (d) Determine a equação diferencial que caracteriza o sistema.

10. Considere um sistema contínuo, linear e invariante no tempo em que a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ estão relacionadas pela equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

   Seja $H(s)$ a transformada de Laplace da resposta impulsiva deste sistema.

   (a) Determine $H(s)$ na forma racional. Desenhe o diagrama de pólos e zeros de $H(s)$.
   (b) Determine $h(t)$ para cada um dos seguintes casos:
      i. o sistema é estável;
      ii. o sistema é causal;
      iii. o sistema não é estável nem causal;

11. Usando uma avaliação geométrica da amplitude da transformada de Fouriera partir do mapa de pólos e zeros, determine, para cada uma das seguintes transformadas de Laplace se a correspondente transformada de Fourier é passa-baixo, passa-alto ou passa-banda;

   (a) $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$, $Re(s) > -1$
   (b) $H_2(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$, $Re(s) > -1/2$
   (c) $H_3(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+1}$, $Re(s) > -1$

12. Neste problema consideraremos que a região de convergência da transformada de Laplace inclui sempre o eixo $j\omega$:

   (a) Considere um sinal $x(t)$ com transformada de Fourier $X(j\omega)$ e transformada de Laplace $X(s) = s + 1/2$. Desenhe o mapa de pólos e zeros para $X(s)$. Desenhe o vector cujo comprimento representa $|X(j\omega)|$ e cujo ângulo com o eixo real represente $\angle X(j\omega)$ para um dado ω.
   (b) Examinando mapa de pólos e zeros da alínea anterior, determine uma transformada de Laplace diferente $X_1(s)$ correspondente ao sinal $x_1(t)$ tal que $|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$ mas $x_1(t) \neq x(t)$. Mostre o mapa de pólos e zeros e os vectores associados que representam $X_1(j\omega)$

(c) Examine os diagramas de vectores e determine a relação entre $\angle X(j\omega)$ e $\angle X_1(j\omega)$.

(d) Determine a transformada de Laplace $X_2(s)$ tal que $\angle X_2(j\omega) = \angle X(j\omega)$, mas em que $x_2(t)$ não seja proporcional a $x(t)$. Mostre o mapa de pólos e zeros e os vectores associados que representam $X_2(j\omega)$

(e) Para o resultado da alínea anterior, determine a relação entre $|X_2(j\omega)|$ e $|X(j\omega)|$.

(f) Considere um sinal $x(t)$ em que a sua transformada de Laplace tem dois pólos em $s_{p1} = -2$ e $s_{p2} = 1$ e dois zeros em $s_{z1} = -1$ e $s_{z2} = 1/2$. Determine $X_1(s)$ tal que $|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$ e que tenha todos os pólos e zeros no semi-plano s esquerdo. Determine também $X_2(s)$ tal que $\angle X_2(j\omega) = \angle X(j\omega)$ e que tenha todos os pólos e zeros no semi-plano s esquerdo.