INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Sianis e Sistemas

2º Semestre 2009/2010

Exercícios de Espaços Vectoriais de Sinais

João Sanches (jmrs@ist.utl.pt)

Espaços Métricos

- Uma métrica é uma função utilizada para medir a distância entre os elementos do espaço de sinais. Para que uma função $d(x,y)$ seja uma métrica é necessário que satisfaça as seguintes propriedades para todos os elementos x e y do espaço
  - $d(x,y)=d(y,x)$
  - $d(x,y)\geq 0$
  - $d(x,y)=0$ se e só se $x=y$
  - para todos os sinais (vectores) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

- Distância entre dois sinais
  - A distância Euclidiana entre dois sinais discretos de comprimento N é a seguinte:

    $$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x(i)-y(i))^2}$$

  - No caso de sinais contínuos, definidos no intervalo $[a,b]$, a distância Euclidiana define-se da seguinte forma

    $$d(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt}$$

Produto Interno de sinais

- Sinais Contínuos definidos no intervalo $[a \quad b]$: $\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)y^*(t)dt$
- Sinais Discretos de comprimento N: $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{N}x(i)y^*(i)$
- O produto interno é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:
  - $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$ em que $()^*$ denota a operação de conjugação.
  - $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$ para todos os escalares $a\in R$
  - $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$
  - $\langle x,x\rangle>0$ se $x\neq 0$ e $\langle x,x\rangle=0$ se e só se $x=0$
- Dois sinais dizem-se ortogonais se o seu produto interno é nulo, $\langle x,y\rangle=0$
- O produto interno induz a seguinte norma: $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$
- A distância Euclidiana pode ser obtida através da norma induzida pelo produto interno. Sejam os sinais x e y, contínuos ou discretos, e seja $e=x-y$ o sinal

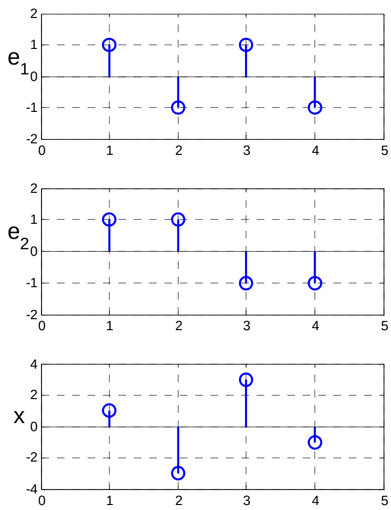
diferença. A distância Euclidiana entre os sinais x e y pode ser calculada através da norma do sinal de erro, isto é, $d_2(x,y) = \|e\| = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$

- O co-seno do ângulo entre dois vectores genéricos u e v: $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$

Exercícios

1. Distância entre sinais
   a. Calcule a distância Euclidiana entre os seguintes sinais discretos:
      i. $x = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1]$ $\qquad y = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 1]$
      ii. $x = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$ $\qquad y = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$
      iii. $x(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$ $\qquad y(n) = (3)^{-n} u(n)$
   b. Qual é a distância Euclidiana entre os seguintes sinais:
      i. $x(t) = \sin(t)$ $\qquad y(t) = \cos(t)$ definidos no intervalo $[-\pi, \pi]$
      ii. $x(t) = t$ $\qquad y(t) = e^{-t^2}$ no intervalo $[0,1]$.
   c. Usando o produto interno,
      i. Calcule a norma do sinal discreto $x(n) = [1 \quad 2 \quad -1 \quad 3]$.
      ii. Calcule a norma do sinal contínuo $x(t) = e^{-2t^2}$
      iii. Calcule a norma do sinal $x(t) = \cos(\omega t)$ definido no intervalo $[-\pi, \pi]$.
   d. Qual é a distância Euclidiana entre os seguintes sinais no intervalo $[0,1]$:
      $x(t) = t$
      $y(t) = t^2$
   e. Calcule o ângulo
      i. Entre os sinais vectores da alínea d)
      ii. Entre os sinais $x(t) = \sin(t)$ $\qquad y(t) = \cos(t)$, definidos no intervalo $[-\pi, \pi]$.

2. Considere os vectores e_1, e_2 e x representados na figura ao lado.



   a. Sabendo que $x = ae_1 + be_2$, é uma combinação linear dos sinais e_1 e e_2 calcule os coeficientes a e b através de um sistema linear de duas equações.
   b. Verifique se os sinais e_1 e e_2 são ortogonais.
   c. Calcule os produtos internos $\langle x, e_1\rangle$ e $\langle x, e_2\rangle$. Como é que estes valores se relacionam com os obtidos em a)?
   d. Calcule o ângulo entre os vectores e_1 e e_2 e entre os vectores e_1 e x.
   e. Calcule a energia dos sinais e_1, e_2 e x.

3. Dados dois sinais, x e y, é possível calcular o sinal projecção de x em y fazendo

$$proj_y x = \langle x, y\rangle \frac{y}{\|y\|^2} = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y$$

O sinal(vector) obtido corresponde à componente de x que está alinhada com y.

   a. Calcule a projecção de $x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$ no sinal $y = [1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]$
   b. Dois sinais dizem-se ortogonais se o seu produto interno é nulo e portanto, se a projecção de cada um deles no outro é também nula. Verifique se os seguintes sinais são ou não ortogonais
      i. $x = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$, $y = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$
      ii. $x = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$, $y = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$
      iii. $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.
      iv. $x(n) = \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right)$, $y(n) = \exp\left(j\frac{2\pi l}{N}n\right)$ para N, k e l inteiros, $0 \le n < N$ e $k \ne l$. E se $k = l$?

4. Seja a seguinte base de um espaço de sinais

$$e_1 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$e_2 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]^T$$

$$e_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]^T$$

e seja $y = [6 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad -2 \quad -6]^T$

   a. Esta base é ortonormada?
   b. Calcule os coeficientes c_1, c_2 e c_3 tal que

      $$y = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \qquad (1)$$

      Nota: Calcule o produto interno de y, à esquerda e à direita de (1) para os três vectores da base. Construa uma equação matricial que lhe permita calcular o vector de coeficientes.
   c. Repita a alínea anterior para $y = [6 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \quad -2 \quad -6]^T$ e calcule o vector $\varepsilon = z - y$, em que $z = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$. Como explica que este vector não seja nulo?
   d. Calcule o produto interno $\langle z, y - z\rangle$. Dê uma explicação geométrica para este resultado.
   e. Qual é o ângulo entre os vectores z e $y - z$.
   f. Formule este problema como um problema de optimização,

      $$\hat{C} = \arg\min_C \|y - AC\|^2$$

      em que $C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T$ é o vector a estimar. Defina a matriz A e deduza a forma fechada da solução em notação matricial. Resolva-o com os dados da alínea a) e b) e compare os resultados.