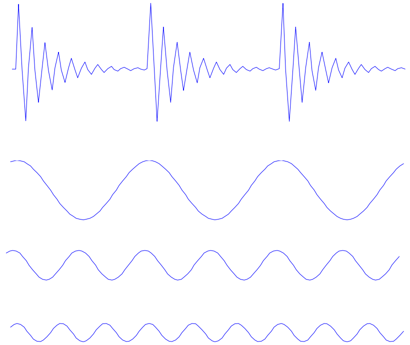
Série de Fourier

Motivação

A série de Fourier foi proposta por Joseph Fourier (sec. XVIII) para representar sinais periódicos através de somas de exponenciais complexas, com frequências múltiplas da frequência fundamental.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$



Motivação (2)

Esta série foi motivo de intenso debate entre os matemáticos da época e levanta várias questões que procuraremos responder:

- que sinais se podem representar desta forma?
- como se calculam os coeficientes c_k?
- porquê usar exponenciais complexas e não polinómios ou splines?

Transformações lineares em IR^n

Consideremos uma transformação linear φ: $IR^n \rightarrow IR^n$ definida por

$$y = Ax, \quad A \in IR^{n \times n}$$

A transformação φ transforma qualquer vector x de IR^n num vector y pertencente a IR^n que em geral tem direcção e comprimento diferentes.

No entanto a transformação preserva a direcção de alguns vectores

$$Ax = \lambda x$$

que são chamados vectores próprios de A.

SLITs e exponenciais

Um SLIT, T, é uma aplicação de um espaço de sinais E em si próprio

$$T:\ x \rightarrow y$$

Haverá sinais que sejam preservados pelos SLIT e se possam considerar sinais próprios?

$$T(x) = \lambda x$$

SIM e são comuns a todos os SLITs! são as exponenciais complexas

$$x(t) = e^{st} \ ,\ s \in C$$

Dem.

$$y(t) = T[e^{st}] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s\tau} \mathrm{d}\tau = H(s) e^{st} = H(s) x(t)$$

A saída é igual à entrada multiplicada por uma constante H(s) que depende de s. H é conhecido por função de transferência, no caso geral, ou resposta em frequência se s=jω.

Bases de exponenciais harmónicas

A série de Fourier usa um conjunto de exponenciais complexas com frequências harmónicas

$$e_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}kt}\ , \quad k \in Z$$

O produto interno entre dois sinais periódicos de período T define-se por

$$\langle f,g \rangle = \frac{1}{T}\int_T f(t) g(t)^* dt = t$$

Calculando o produto interno entre duas exponenciais obtém-se

$$\langle e_p, e_q \rangle = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

As exponenciais complexas são ortogonais: o produto interno entre duas exponenciais complexas diferentes é nulo.

Prova

$$\langle e_p, e_q \rangle = \frac{1}{T}\int_T e^{j\frac{2\pi}{T}pt} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}qt} \right)^* dt = \frac{1}{T}\int_T e^{j\frac{2\pi}{T}(p-q)t} dt$$

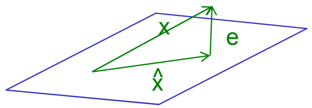
se p=q $\quad \langle e_p, e_q \rangle = \frac{1}{T}\int_T 1 dt = 1$

se p≠q $\quad \langle e_p, e_q \rangle = \frac{1}{T}\int_T e^{j\frac{2\pi}{T}(p-q)t} dt = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{j\frac{2\pi}{T}(p-q)t}}{j\frac{2\pi}{T}(p-q)} \right]_0^T = 0$

Aproximação de ordem n

Pretende-se aproximar um sinal periódico x(t), de período T, através de uma combinação linear de exponenciais harmónicas

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$



Os coeficientes calculam-se de forma simples

$$c_k = \langle x, e_k \rangle = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

Norma da aproximação

$$\|\hat{x}\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Norma do erro

$$\|x\|^2 = \langle \hat{x}+e, \hat{x}+e \rangle = \langle \hat{x},\hat{x} \rangle + \langle \hat{x},e \rangle + \langle e,\hat{x} \rangle + \langle e,e \rangle \qquad \|e\|^2 = \|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2$$

A norma do erro tende para zero se n tender para infinito?

Exemplo

Calcular a série de Fourier do sinal

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\phi(t-p) \qquad \phi(t)=\begin{cases}1-|2t| & |t|<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

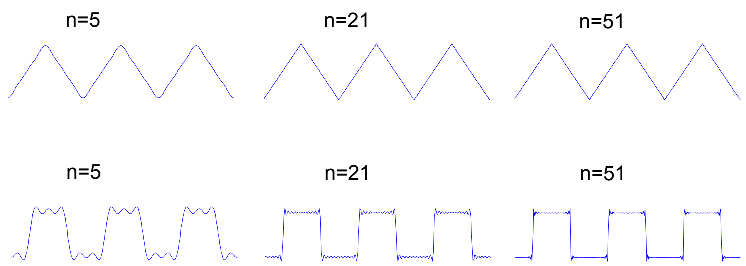
$$c_k=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-|2t|)e^{-j2\pi kt}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{-j2\pi kt}dt+2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}te^{-j2\pi kt}dt-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}te^{-j2\pi kt}dt$$

Para k=0 obtém-se $c_0=1/2$. Para k≠0, o primeiro integral é nulo e os outros podem calcular-se por partes

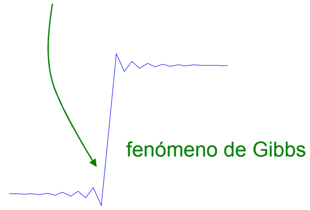
$$c_k=2t\frac{e^{-j2\pi kt}}{-j2\pi k}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{e^{-j2\pi kt}}{-j2\pi k}dt-2t\frac{e^{-j2\pi kt}}{-j2\pi k}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}+2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-j2\pi kt}}{-j2\pi k}dt=$$

$$=-\frac{(-1)^k}{j2\pi k}-2\frac{e^{-j2\pi kt}}{-4\pi^2k^2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\frac{(-1)^k}{j2\pi k}+2\frac{e^{-j2\pi kt}}{-4\pi^2k^2}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1-(-1)^k}{\pi^2k^2}$$

Convergência



quando há descontinuidades em x(t)
observa-se o fenómeno de Gibbs



Convergência

Pretende-se saber se uma série de Fourier converge e se converge para o sinal desejado x(t). Há vários tipos de convergência e vários resultados.

$$S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

convergência ponto a ponto: se x verificar as condições de Dirichelet:

- x é absolutamente integrável num período $\int_T |x(t)|dt<\infty$
- x é de variação limitada em qualquer intervalo finito
- x tem um número finito de descontinuidades e as descontinuidades são finitas, em qualquer intervalo finito.

então S_n converge em qualquer instante t_0 e

$$\lim S_n(t_0)=\frac{1}{2}\left[x(t_0^-)+x(t_0^+)\right]$$

convergência em norma: se $||x||<\infty$ então $||S_n-x||\to 0$

Propriedade da linearidade

Se x(t), y(t) forem sinais periódicos, com período T, e coeficientes de Fourier c_k, d_k então

$$\alpha x(t)+\beta y(t)\leftrightarrow \alpha c_k+\beta d_k \quad , \quad \forall \alpha,\beta$$

Dem.

os coeficientes da série de Fourier de $\alpha x(t)+\beta y(t)$ são dados por

$$f_k=\langle \alpha x(t)+\beta y(t),e_k(t)\rangle=\alpha\langle x(t),e_k(t)\rangle+\beta\langle y(t),e_k(t)\rangle=\alpha c_k+\beta d_k$$

Propriedade do deslocamento

Se x(t) for um sinal periódico, com período T

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}c_k \;, \quad \forall t_0$$

$$|d_k| = |c_k|$$

$$\angle d_k = \angle c_k - \tfrac{2\pi}{T}t_0 k$$

Dem.

$$d_k = \tfrac{1}{T}\int_0^T x(t-t_0)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \tfrac{1}{T}\int_{-t_0}^{T-t_0} x(\alpha)e^{-j\frac{2\pi}{T}k(\alpha+t_0)}d\alpha =$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}\,\tfrac{1}{T}\int_{-t_0}^{T-t_0} x(\alpha)e^{-j\frac{2\pi}{T}k\alpha}d\alpha = e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}c_k$$

Um deslocamento no tempo corresponde a multiplicar os coeficientes da série por uma exponencial complexa que adiciona um termo linear à fase.

Sinais reais

Se x(t) for um sinal periódico real, com período T

$$c_{-k} = c_k^*$$

Dem.

$$x(t) = x^*(t) \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{j\frac{2\pi}{T}pt}\right)^* = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p^* e^{-j\frac{2\pi}{T}pt}$$

fazendo p=-k vem

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k}^* e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \Rightarrow c_k = c_{-k}^* \;\text{ e }\; c_{-k} = c_k^*$$

Se x(t) for um sinal real os coeficientes de índice negativo são complexos conjugados dos coeficientes de índice positivo.

Propriedade da derivação

Se x(t) for um sinal periódico, com período T

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\tfrac{2\pi}{T}kc_k$$

Dem.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{d}{dt}e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(j\tfrac{2\pi}{T}k\right)c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$d_k = j\tfrac{2\pi}{T}kc_k$$

Derivar no tempo é equivalente a multiplicar os coeficientes da série por -j2πk/T

Teorema de Parseval

Se x(t) for um sinal periódico, com período T

$$\|x\|^2 = \|c\|^2$$

Dem.

$$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e_k(t), x\right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left\langle e_k(t), \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e_p(t)\right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p^* \langle e_k(t), e_p(t)\rangle$$

Como $<e_k,e_p>=\delta(k-p)$, vem

$$\|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|c\|^2$$

A norma do sinal x(t) no domínio do tempo é igual à norma dos coeficientes de Fourier.

Filtragem de sinais periódicos

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j\tfrac{2\pi}{T}k)c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

A resposta do SLIT é também periódica.

Os coeficientes de Fourier da saída são os coeficientes e Fourier da entrada multiplicados pela resposta em frequência nas frequências das harmónicas.

Propriedades

x,y sinais periódicos com período T e coeficientes de Fourier c_k, d_k

$\alpha x(t)+\beta y(t)$	$\leftrightarrow$	$\alpha c_k+\beta d_k$	linearidade
$x(t-t_0)$	$\leftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi}{T}kt_0}c_k$	deslocamento
$x(t)y(t)$	$\leftrightarrow$	$\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p d_{k-p}$	multiplicação
$x(-t)$	$\leftrightarrow$	c_{-k}	inversão no tempo
$x^*(t)$	$\leftrightarrow$	c_{-k}^*	*conjugado*
$\mathrm{Re}\{x(t)\}$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{2}[c_k+c_{-k}^*]$	parte real
$\mathrm{Im}\{x(t)\}$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{2}[c_k-c_{-k}^*]$	parte imaginária
$x(t)\in IR$	$\leftrightarrow$	$c_{-k}=c_k^*$	sinal real
$\frac{dx(t)}{dt}$	$\leftrightarrow$	$j\frac{2\pi}{T}kc_k$	derivada
$\|x(t)\|$	$=$	$\|c\|$	teorema de Parseval