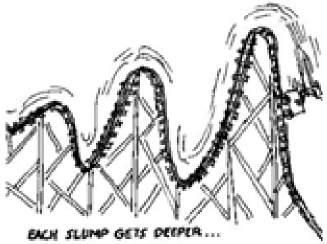
Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Sistemas Dinâmicos



O que é um sistema?

Um sistema é um objecto ou grupo de objectos que interagem com o mundo. Essa interacção é representada através de entradas e saídas.

A entrada e a saída são sinais. Um sistema transforma um sinal de entrada num sinal de saída.

$$x \rightarrow y$$

$$y = T(x)$$

Sistema massa-mola-atrito

entrada: força vertical aplicada

saída: posição da corpo

equação diferencial:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+k_a\frac{dx}{dt}+k_m x(t)=F(t)$$

saída   entrada

Sistemas contínuos e discretos

Um sistema T transforma sinais de entrada em sinais de saída.

Se a entrada e saída forem sinais discretos, T é um sistema discreto. Se forem sinais contínuos, T é um sistema contínuo.

Sistemas discretos

- universidade
- processo económico
- bolsa de valores
- filtros digitais
- sistemas computacionais

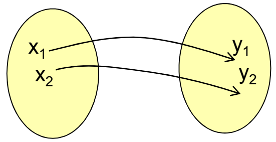
Sistemas contínuos

- circuito electrónico
- motor
- aeronave
- processo industrial
- filtros analógicos

Muitos sistemas contínuos podem ser convertidos em discretos se as entradas e saídas forem amostradas (medidas) periodicamente.

Invertível

Definição: um sistema é invertível se dado qualquer sinal de saída y for possível determinar univocamente a entrada. Isso exige que a transformação seja injectiva.



Exemplos:

$y(n) = 2x(n)$	invertível
$y(n) = 0$	não invertível
$y(t) = x(t-1)$	invertível
$y(t) = x(t) + x(-t)$	não invertível

Causalidade

Um sistema é causal se a saída depender apenas de entradas anteriores.

Definição: Um sistema é causal, se dadas duas entradas quaisquer, iguais até um instante t_0, as saídas forem iguais até esse instante*

$$x_1(t) = x_2(t), \forall t < t_0 \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_2(t), \ \forall t < t_0$$

Exemplos:

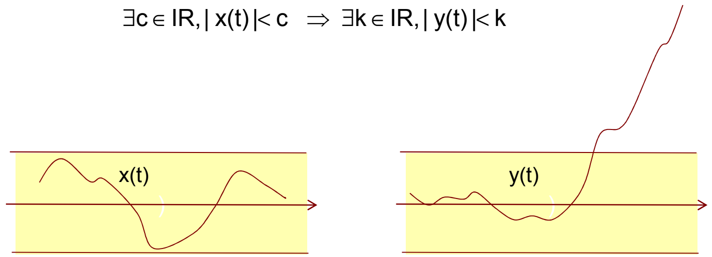
$y(n) = x(n) + x(n-1)$	causal
$y(n) = x(n+1) - x(n-1)$	não causal
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	causal
$y(t) = \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$	não causal

* A definição é igual para sistemas contínuos ou discretos. Basta substituir t por n.

Estabilidade

Definição: um sistema é estável se para toda a entrada limitada a saída for limitada ou seja, se para toda a entrada x(t) se verificar a condição

$$\exists c \in IR, |x(t)| < c \quad \Rightarrow \quad \exists k \in IR, |y(t)| < k$$



instável

Exemplos

$y(n) = 1000\, x(n)$	estável
$y(n) = y(n-1) + x(n)$	instável
$y(t) = e^{x(t)}$	estável
$y(t) = \frac{dx}{dt}$	instável

Linearidade

Um sistema é linear se for válido o princípio da sobreposição generalizado: : a resposta do sistema a uma combinação linear de duas entradas x_1, x_2 é uma combinação linear das saídas y_1, y_2

Definição: um sistema é linear sse, para quaisquer sinais de entrada x_1, x_2

$$x_1 \to y_1, x_2 \to y_2 \;\Rightarrow\; \forall a,b \in C,\; ax_1 + bx_2 \to ay_1 + by_2$$

Exemplos:

$y(n) = 10\,x(n)$	linear
$y(n) = 10\,x(n) + 1$	não linear
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	linear
$y(t) = \cos(x(t-1))$	não linear

Invariância no tempo

Um sistema é invariante no tempo quando o seu funcionamento não se altera ao longo do tempo.

Definição: um sistema é invariante no tempo se para qualquer entrada x e deslocamento t_0

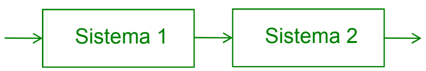
$$x(t) \to y(t) \;\Rightarrow\; x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$

Exemplos:

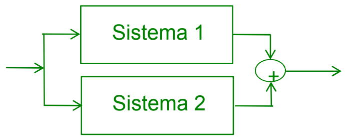
$y(n) = 10\,x(n)$	Invariante no tempo
$y(n) = n\,x(n)$	não Invariante no tempo
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	Invariante no tempo
$y(t) = x(0) + x(t)$	não Invariante no tempo

Ligação de sistemas

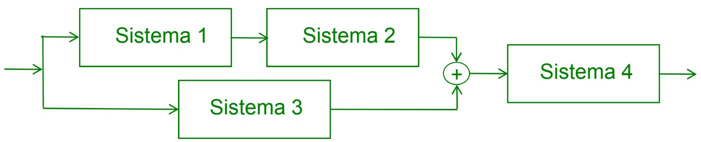
ligação série



ligação paralelo



ligação série-paralelo



Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

SLITs

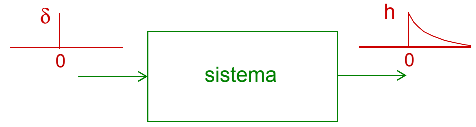
Os sistemas lineares e invariantes no tempo (SLITs) gozam das propriedades de linearidade e de invariância no tempo.

Têm vantagens importantes:

- é uma classe muito geral que permite construir boas aproximações do comportamento de muitos sistemas físicos
- podem ser estudados analiticamente usando ferramentas poderosas, em particular, a transformada de Fourier
- ficam totalmente caracterizados pela resposta do sistema a um impulso.

Resposta ao impulso

A resposta ao impulso, h, obtém-se aplicando um impulso unitário à entrada do sistema e observando a saída



caso discreto	caso contínuo
$\delta(n) \rightarrow h(n)$	$\delta(t) \rightarrow h(t)$

A resposta ao impulso caracteriza completamente o SLIT.

Convolução

A saída de um SLIT pode ser calculada através da convolução entre a entrada e a resposta ao impulso unitário h ou seja

$$y = x * h$$

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) \quad \text{caso discreto}$$

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau \quad \text{caso contínuo}$$

Dem.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$\begin{aligned} y(n) = T\, x(n) &= \mathrm{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, \mathrm{T}\delta(n-k) \quad \text{linearidade} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) \quad \text{invariância} \\ &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} y(n) = T\, x(t) &= \mathrm{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \mathrm{T}\delta(t-\tau)\, d\tau \quad \text{linearidade} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau \quad \text{invariância} \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

nota: nem sempre a soma ou o integral de convolução convergem!

Exemplo: convolução discreta

Pretende-se calcular a resposta de um sistema de resposta impulsiva causal $h(n)=a^n u(n)$, $|a|<1$, a uma entrada exponencial $x(n)=b^n u(n)$, $|b|<1$.

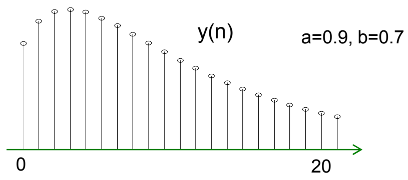
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} b^k a^{n-k} u(n-k)$$

Se n<0, então y(n)=0. Se n≥0

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{b}{a}\right)^k = a^n \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = \frac{a}{a-b} a^{n+1} + \frac{b}{b-a} b^{n+1}$$

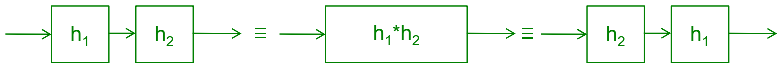
Resposta

$$y(n) = \left[\frac{a}{a-b} a^{n+1} + \frac{b}{b-a} b^{n+1}\right] u(n)$$

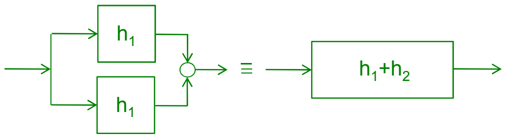


Propriedades da convolução

$x * y = y * x$	comutativa	
$(x * y) * z = x * (y * z)$	associativa	
$(x + y) * z = x * z + y * z$	distributiva	
$x * \delta = x$	elemento neutro	prove!



prove!



estas propriedades são válidas tanto para sinais contínuos como discretos.

Causalidade

Um SLIT é causal sse a sua resposta ao impulso for um sinal causal, isto é,

$$h(n) = 0\,, \forall n < 0 \qquad\qquad h(t) = 0\,, \forall t < 0$$

Dem: caso discreto

a) Se $h(n) = 0\,, \forall n < 0$ então $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$

A saída no instante n só depende de entradas passadas ou da entrada presente, logo o sistema é causal.

b) Se h(n) não for nulo para todos os instante de tempo negativos, então existe um instante $n_0<0$ para o qual $h(n_0)\neq 0$. Consideremos uma entrada $x(n)=x(-n_0)\delta(n+n_0)$

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(0-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(-n_0)\delta(k+n_0)h(-k) = x(-n_0)h(n_0)$$

Neste caso a saída em n=0 depende de entradas futuras e o sistema não é causar.

Estabilidade

Um SLIT é estável sse for absolutamente somável / integrável

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$

Dem: caso discreto

a) Se h for absolutamente somável, e a entrada for limitada |x(n)|<B, ∀n, então

$$|y(n)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(k)x(n-k)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(k)|\,|x(n-k)| \leq B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

b) Se h não for absolutamente somável, e se a entrada for x(n)=sign{h(-n)} em que sign designa o sinal do argumento, então

$$y(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)x(0-k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)sign\{h(k)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = +\infty$$

e a saída não é limitada.

Exemplos

$h(t) = u(t)$	causal	instável
$h(t) = e^{at}u(t)$	causal	estável sse a < 0
$h(t) = e^{at}u(-t)$	não causal	estável sse a > 0
$h(n) = 1$	não causal	instável
h(n) = u(-n)	não causal	instável
$h(n) = u(n) - u(n-N)$	causal	estável

desenhe estas respostas impulsivas

Resposta ao escalão de um SLIT

Se aplicarmos um escalão unitário a um SLIT, então a saída é

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+n} h(k) \qquad s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

$$h(n) = s(n) - s(n-1) \qquad h(t) = \frac{ds}{dt}$$

Sistemas descritos por equações diferenciais

Os sistemas contínuos são frequentemente descritos por equações diferenciais.

Por exemplo,

movimento de um corpo sujeito a uma força f $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$

crescimento de bactérias $\quad \frac{dy}{dt} = ay(t)$

depósito bancário $\quad \frac{dy}{dt} = ay(t) + x(t)$

predador-presa (Lotka-Volterra)

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha\, y_1(t) - \beta\, y_1(t) y_2(t)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -\gamma\, y_2(t) + \delta\, y_1(t) y_2(t)$$

Exemplo

Consideremos um sistema definido por

$\frac{dy}{dt} = 2y(t) + x(t)$ inicialmente em repouso

Pretende-se calcular a resposta a uma entrada x(t) = Ke^{3t} u(t)

Para t<0 a entrada é nula e a saída também. Para t>0, equação a resolver é

$$\frac{dy}{dt} = 2y(t) + Ke^{3t}\,,\ \text{ci}:\ y(0) = 0$$

solução particular $y_p(t)=Y_pe^{3t}$

$$Y_p 3e^{3t} = 2Y_p e^{3t} + Ke^{3t}$$
$$(3-2)Y_p e^{3t} = Ke^{3t} \Rightarrow Y_p = K$$

solução $y(t) = Ke^{3t} + Y_h e^{2t}$

solução geral da eq. homogénea $y_h(t)=Y_he^{st}$

$$sY_h e^{st} = 2Y_h e^{st} \Rightarrow (s-2)Y_h e^{st} = 0$$
$$s = 2$$

ajuste de constante: como y(0)=0 vem $\quad Y_h = -K\,,\quad y(t) = Ke^{3t} - Ke^{2t}$

Caso geral: equação linear de ordem n

equação diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

condições iniciais

$$\left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = c_{n-1}\,,\ \ldots,\ y|_{t=t_0} = c_0$$

A solução é a soma de uma solução particular com a solução geral da equação homogénea.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Solução particular

Se a excitação for x(t)=X $e^{s_p t}$ então

$$y_p(t) = Y_p e^{s_p t}$$

$$Y_p = \frac{b_m s_p^m + \cdots + b_1 s_p + b_0}{a_n s_p^n + \cdots + a_1 s_p + a_0}$$

Equação homogénea

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{s_k t}$$

s_k é a k-èsima raiz da equação característica

$$a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

Sistemas descritos por equações às diferenças

Os sistemas discretos são frequentemente descritos por equações às diferenças.

As equações às diferenças relacionam valores actuais e passados da entrada e da saída. Por exemplo,

$$y(n) - 2y(n-1) = x(n) - \tfrac{1}{2}x(n-1) - \tfrac{1}{2}x(n-2)$$

Exemplo

Consideremos um sistema definido por

$$y(n) - \tfrac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

inicialmente em repouso

Pretende-se calcular a resposta a uma entrada $x(n) = 2^n u(n)$

Para $n<0$ a entrada é nula e a saída também. Para $n\geq 0$, equação a resolver é

$$y(n) - \tfrac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

solução particular $y_p(n)=Y_p 2^n$

$$Y_p 2^n - \tfrac{1}{2}Y_p 2^{n-1} = 2^n$$

$$(1-\tfrac{1}{2}2^{-1})Y_p 2^n = 2^n \Rightarrow Y_p = \tfrac{4}{3}$$

solução $y(n) = \tfrac{4}{3}2^n + Y_h\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$

solução geral da eq. homogénea $y_h(t)=Y_h z^n$

$$Y_h z^n - \tfrac{1}{2}Y_h z^{n-1} = 0 \Rightarrow (z-\tfrac{1}{2})Y_h z^{n-1} = 0$$

$$z = \tfrac{1}{2}$$

ajuste de constante: como y(0)=0 vem $Y_h = -\tfrac{4}{3}$, $y(n) = \tfrac{4}{3}2^n - \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$

Caso geral: equação linear de ordem q

equação às diferenças e condições iniciais

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_q y(n-q) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_p x(n-p)$$

$$y(n_0) = c_0\,,\ \ldots, y(n_0+q-1) = c_{q-1}$$

A solução é a soma de uma solução particular com a solução geral da equação homogénea.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Solução particular

Se a excitação for $x(n)=X\, z_p^{\,n}$ então

$$y_p(n) = Y_p z_p^n$$

$$Y_p = \frac{b_p z_p^p + \cdots + b_1 z_p + b_0}{a_q z_p^q + \cdots + a_1 z_p + a_0}$$

Equação homogénea

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_q y(n-q) = 0$$

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{q} A_k z_k^n$$

z_k é a k-èsima raiz da equação característica

$$a_q z^q + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$