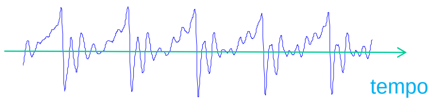
Sinais

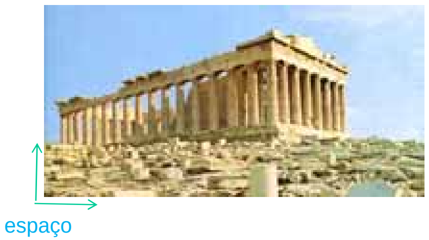
Sinais contínuos e discretos

Sinais: o que são?

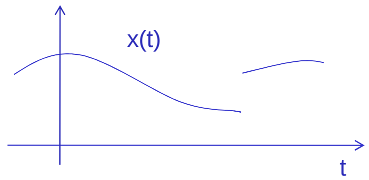
Os sinais traduzem a evolução de uma grandeza ao longo do tempo



ou do espaço



Sinais contínuos



$x: IR \rightarrow IR$

ou

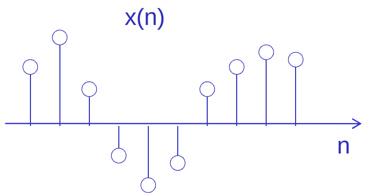
$x: [a,b] \rightarrow IR$

Um sinal diz-se contínuo se o seu domínio for IR ou um intervalo de IR.

A maioria dos sinais físicos são contínuos, p.ex., posição e velocidade de um corpo, fala ou música captada por um microfone, tensão ou corrente num circuito eléctrico.

Nota: não confundir com o conceito de continuidade de uma função. Um sinal contínuo pode apresentar descontinuidades.

Sinal discreto



$x: Z \rightarrow IR$

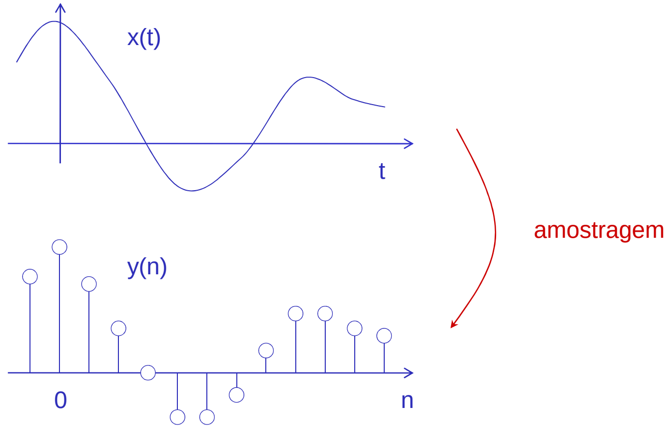
ou

$x: \{0, 1, \ldots, N-1\} \rightarrow IR$

Um sinal diz-se discreto se o seu domínio for Z ou um intervalo de Z.

Só os sinais discretos podem ser armazenados e processados em computadores digitais.

Como guardar música em computador?



É preciso ainda converter as amostras y(n) em sequências binárias que possam ser guardadas no computador → codificação (MP3)

Amostragem

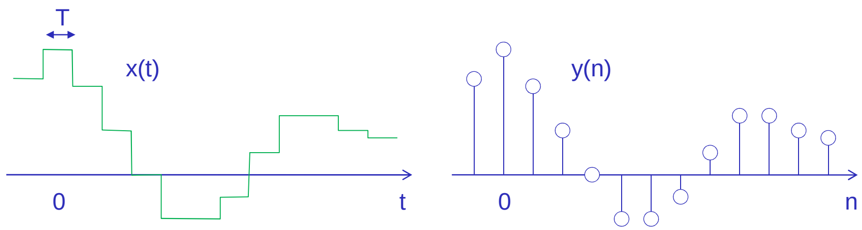
Pode-se converter um sinal contínuo x(t) num sinal discreto y(n) através de uma operação de amostragem

$y(n)= x(nT)$ T - intervalo de amostragem

Será possível recuperar x(t) a partir do sinal amostrado?

Há (sempre) perda de informação no processo de amostragem?

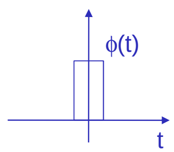
Exemplo – sinal constante por troços



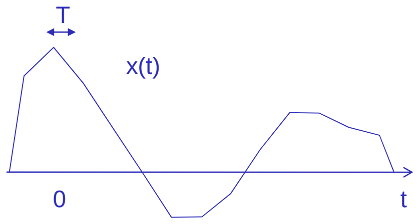
Neste caso não há perda de informação na amostragem: x(t) é uma soma de impulsos rectangulares!

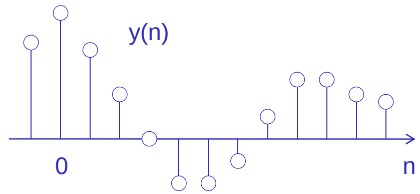
amostragem $y(n) = x(nT)$

reconstrução $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\phi(t-kT)$



Exemplo – sinal linear por troços

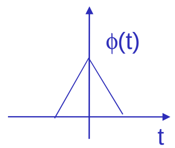




Neste caso não há perda de informação na amostragem: x(t) é uma soma de impulsos triangulares!

amostragem $y(n) = x(nT)$

reconstrução $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\phi(t-kT)$



Reconstrução (conversão DA)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\phi(t-kT)$$

A função ϕ depende da classe de funções contínuas que foi amostrada.

Nos exemplos anteriores $\phi(t)$ são splines de ordem 0 e 1, respectivamente e a reconstrução é perfeita.

Para outros tipos de sinais a reconstrução pode ser aproximada.

Sinais complexos e vectoriais

Os sinais considerados nos exemplos anteriores tomam valores reais: o contradomínio é IR.

Surgem frequentemente outros tipos de sinais p.ex., sinais complexos e sinais vectoriais. Nestes casos o contradomínio C ou IR^n.

Exemplos:

- exponenciais complexas (sinais auxiliares)
- sinal de ECG com múltiplos canais

Sinais elementares discretos

Sinais elementares

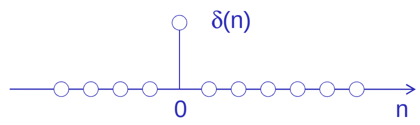
Os sinais reais podem ter grande complexidade. No entanto, é útil definir sinais simples porque é muitas vezes possível decompor um sinal complexo na soma de sinais simples.

Sinais elementares:

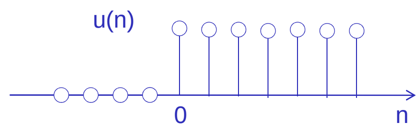
- impulso unitário
- escalão unitário
- exponencial complexa

estão definidos tanto no caso contínuo como discreto

Impulso e escalão unitários (discreto)



$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$



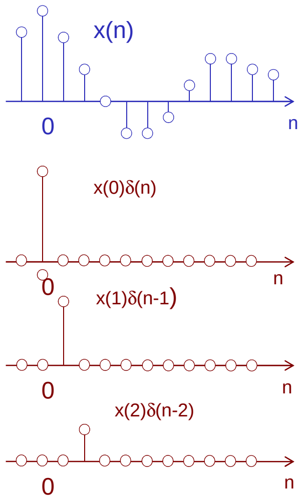
$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

relação

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=1}^{n}\delta(k)$$

Decomposição de um sinal em impulsos

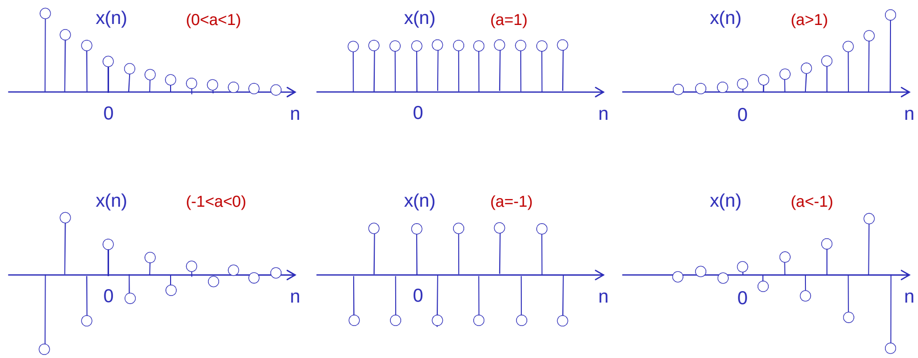


$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

Exponencial (discreta)

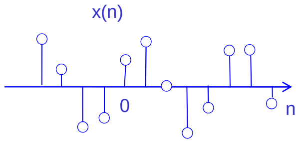
$x(n)=a^n \quad , \quad a\in IR$

este sinal é uma progressão geométrica



Sinusóide

$$x(n) = \cos(\omega n + \phi)\ , \quad \omega, \phi \in IR$$



a sinusóide é um sinal periódico?

Propriedade: duas sinusóides com frequências ω e $\omega' = \omega + 2\pi\,k$ são iguais.

$$\cos(\omega' n) = \cos((\omega + 2\pi\,k)n) = \cos(\omega n + 2\pi\,kn) = \cos(\omega n)$$

A frequência discreta ω toma valores no intervalo [-π,π[. Todas as outras frequências são equivalentes a uma frequência neste intervalo.

Sinais periódicos

Definição

Um sinal discreto x(n) é periódico com período N∈IN sse

$$x(n+N) = x(n)\ , \ \forall n \in Z$$

N diz-se o período fundamental se for o menor período.

Uma sinusóide é um sinal periódico?

$$\cos(\omega(n+N)) = \cos(\omega n) \quad \text{sse } \exists k: \ \omega(n+N) = \omega n + 2\pi k$$

A sinusóide é periódica sse

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{N}$$

i.e., se ω/2π for um número racional.

Exponencial complexa

$$x(n) = z^n \quad , \ z \in C$$

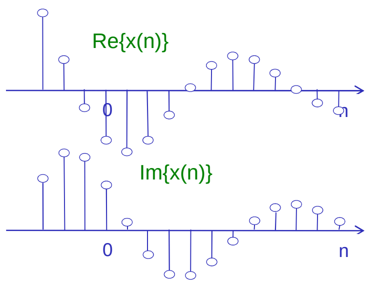
Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Se $z = ae^{j\omega}$ então

$$x(n) = (ae^{j\omega})^n = a^n e^{j\omega n}$$

$$x(n) = a^n(\cos\omega n + j\sin\omega n)$$



Parte real e imaginária

$$\mathrm{Re}\{x(n)\} = a^n\cos\omega n$$

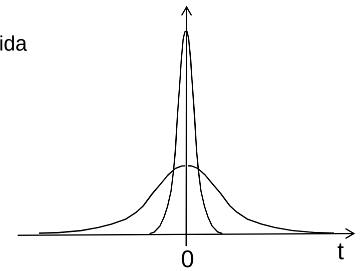
$$\mathrm{Im}\{x(n)\} = a^n\sin\omega n$$

Sinais elementares contínuos

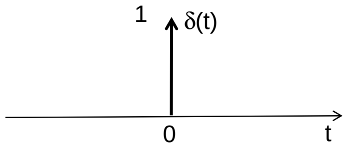
Impulso unitário (tempo contínuo)

O impulso unitário em tempo contínuo é definido pela função delta de Dirac δ(t).

A função delta é uma função generalizada, definida como o limite de uma sequência de funções gaussianas com variância tendente para zero.



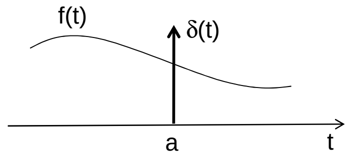
Representa-se através de uma seta vertical.



Tem o valor nulo em todos os pontos excepto na origem onde tem amplitude infinita. O integral (área) é igual a 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

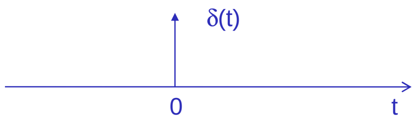
Propriedade fundamental

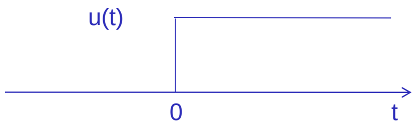


$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

f é uma função contínua em a.

Impulso e escalão unitários (contínuo)





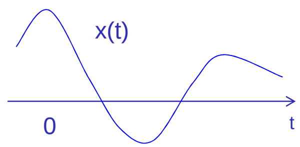
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

relação

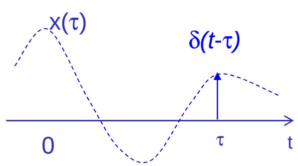
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

Decomposição de um sinal em impulsos



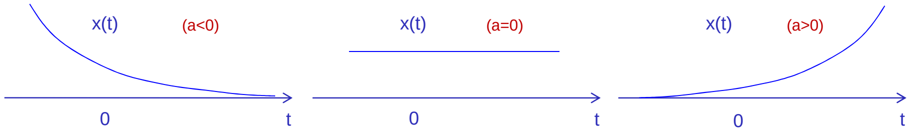
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



Um sinal x(t) é uma "soma" (integral) de impulsos centrados em todos os instantes de tempo τ, com amplitude x(τ)dτ.

Exponencial (contínua)

$x(t) = e^{at}$, $a \in IR$

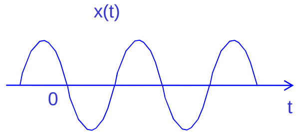


Sinusóide

$x(t) = \cos(\omega t + \phi)$

$\omega \in IR$ frequência angular

$\phi \in [-\pi, \pi[$ fase na origem



a sinusóide contínua é um sinal periódico!

Sinais periódicos

Definição

Um sinal contínuo x(t) é periódico com período T∈IR sse

$$x(t+T) = x(t) \ , \ \forall t \in \mathrm{IR}$$

T diz-se o período fundamental se for o menor período positivo.

Uma sinusóide é um sinal periódico

$$\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega t) \quad \text{sse} \quad \omega(t+T) = \omega t + 2\pi k$$

$$\omega T = 2\pi k$$

O período fundamental é

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Exponencial complexa

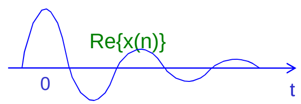
$$x(t) = e^{(a+j\omega)t} \quad , \ a, \omega \in IR$$

Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$x(t) = e^{at} e^{j\omega t}$$

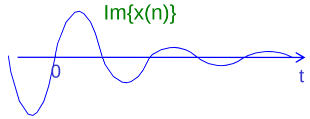
$$x(n) = e^{at}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$



Parte real e imaginária

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = e^{at}\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}\{x(t)\} = e^{at}\sin\omega t$$



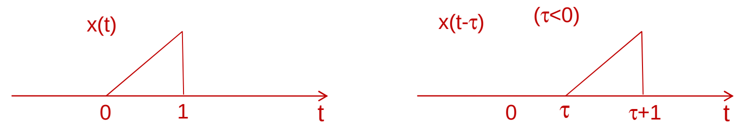
Transformações da variável independente

Deslocamento

Por vezes um sinal x sofre um deslocamento no tempo de amplitude τ

$$y(t) = x(t-\tau)$$

Se τ>0 a transformação é um atraso, se τ<0 é um avanço.

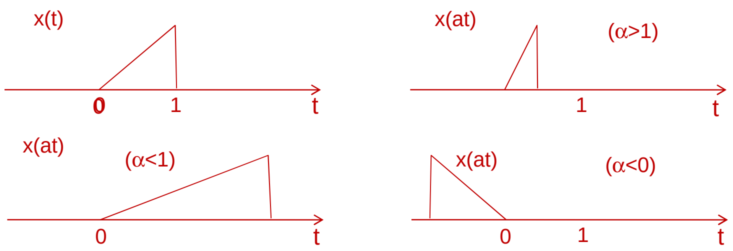


Escalamento

Por vezes altera-se a escala de tempo afectando-a de um factor multiplicativo

$$y(t) = x(at)$$

Se a>1 a transformação é uma compressão, se a<1 é uma expansão. Se a<0 há uma inversão.

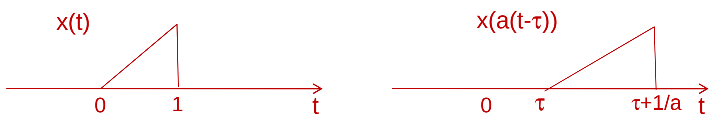


Escalamento e deslocamento

Por vezes um sinal x sofre um deslocamento no tempo de amplitude τ e um escalamento

$$y(t) = x(a(t-\tau))$$

O deslocamento τ diz respeito apenas ao instante 0, uma vez que outros instantes são deslocados de quantidades diferentes,



Transformação da variável independente em sinais discretos

No caso dos sinais discretos é preciso garantir que a transformação da variável $n \in Z$ conduz a um instante de tempo discreto. Isso impõe algumas restrições:

$$y(n) = x(an - n_0)$$

- n_0 tem de ser inteiro
- o factor de escala, a, tem que ser inteiro (2,3,…) o que só permite fazer a compressão do sinal e com perda de informação.
- não é possível usar factores de escala entre 0 e 1 (expansão).

como fazer a expansão de um sinal discreto?

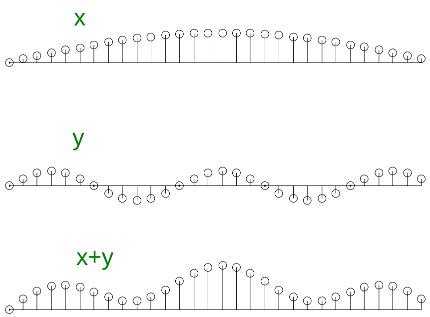
Espaços de sinais

Adição de sinais

Seja E o conjunto formado pelos sinais (contínuos ou discretos) definidos num domínio D .

A adição de dois sinais $x,y \in E$ é um sinal $z=x+y$ definido por

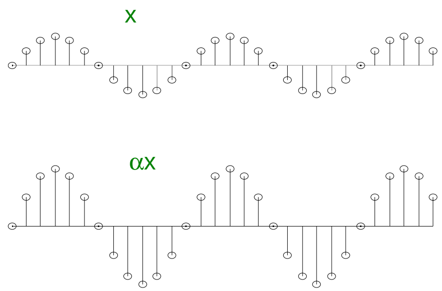
$$z(n) = x(n) + y(n), \ \forall n$$



Multiplicação de um sinal por um escalar

A multiplicação de um sinal $x \in E$ por um escalar $\alpha \in K$ é um sinal $z = \alpha x$ definido por

$$z(n) = \alpha x(n), \ \forall n$$



O conjunto dos escalares K pode ser IR ou C.

Espaço vectorial

Um conjunto E é um espaço vectorial se for fechado para as operações de adição e de multiplicação por escalares e se se verificarem os seguintes axiomas

axiomas da adição

$x+y=y+x$	comutativa
$(x+y)+z=x+(y+z)$	associativa
$\exists 0 \in E, x+0=x$	elemento neutro
$\exists x' \in E, x+x'=0$	inverso

axiomas da multiplicação por um escalar

$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$	associativa
$1x=x$	elemento neutro

axiomas conjuntas

$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$	distributiva
$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$	distributiva

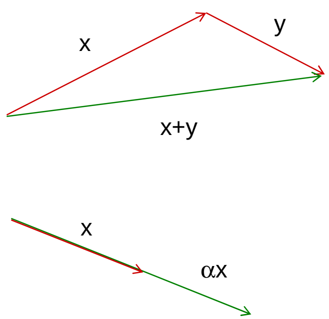
Os elementos de E designam-se por vectores

Exemplos

São espaços vectoriais os seguintes conjuntos:

- vectores (reais ou complexos) de n componentes.
- sinais discretos com domínio Z
- sinais discretos periódicos com período N
- sinais discretos com domínio {0, 1, …, N-1}
- sinais contínuos com domínio IR
- sinais contínuos periódicos com período T
- sinais contínuos com domínio [a,b]

Interpretação geométrica



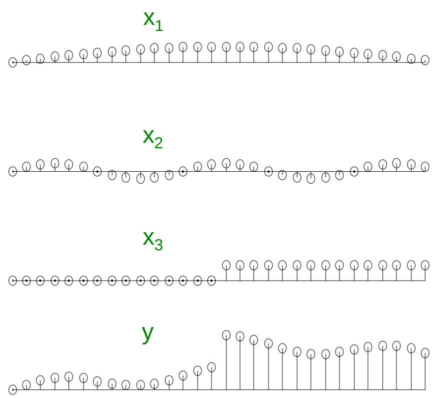
Esta interpretação é apenas sugestiva pois os vectores são grandezas abstractas; só é rigorosa para $E=IR^2$.

Combinação linear

Uma combinação linear de elementos de E, $x_1, x_2, \dots, x_n$, é um elemento de E definido por

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

n vectores dizem-se linearmente independentes se nenhum deles se puder exprimir como combinação linear dos outros.



Base

Um conjunto de vectores B={v_1, v_2, …, v_n} diz-se uma base de E se os vectores forem linearmente independentes e se qualquer vector $x \in$ E se exprimir como combinação linear dos vectores de base

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

Exemplos

Duas bases possíveis para E=IR^4 são

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \text{base canónica}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\3\end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad u_4 = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Produto interno

O produto interno de dois vectores é uma medida de alinhamento dos vectores e pode definir-se de várias formas.

Uma aplicação < . , . > de ExE em K (IR ou C) é um produto interno se verificar as seguintes propriedades $\forall x,y \in E$, $\forall \alpha \in K$,

$$\begin{aligned}
&i) \ \langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x,y\rangle \\
&ii) \ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle^* \\
&iii) \ \langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \\
&iv) \ \langle x,x\rangle \geq 0 \ , \ \langle x,x\rangle = 0 \ \text{ sse } \ x = 0
\end{aligned}$$

Exemplos

Espaço E=C^n

produto interno $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k^*$

Espaço de sinais discretos definidos em Z

produto interno $\langle x,y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^*$

Espaço de sinais contínuos definidos em IR

produto interno $\langle x,y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)^* \, dt$

Nem sempre a soma ou o integral convergem.

Exemplos (cont.)

Espaço de sinais periódicos discretos com período N

produto interno $\langle x,y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n)^*$

soma e integral ao longo de um período

Espaço de sinais periódicos contínuos, com período T

produto interno $\langle x,y \rangle = \int_0^T x(t)y(t)^* \, dt$

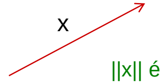
Comprimento (norma) de um vector

Seja E um espaço vectorial. Norma ||.|| é qualquer aplicação de E em IR_0^+ que verifique os seguintes axiomas $\forall u,v \in E$, $\forall \alpha \in K$,

$i)\ \ \|x\| > 0$ se $x \neq 0$

$ii)\ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

$iii)\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$



||x|| é o comprimento do vector x

Se existir um produto interno definido em E, a norma induzida é

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

Exemplo: o produto interno habitual em IR^3 é $\langle x,y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

é a norma induzida é a norma euclideana $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + x_1^2}$

Ângulo entre dois vectores

O produto interno goza da seguinte propriedade

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Os valores extremos são atingidos quando há alinhamento entre os dois vectores : y=-x ou y=x.

Assim, define-se ângulo θ entre dois vectores x,y através da expressão

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

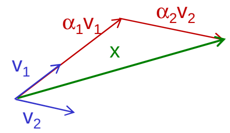
Quando <x,y>=0, os dois vectores dizem-se ortogonais.

Decomposição em funções de base

Como decompor um vector x como combinação linear de vectores de base?

o produto interno pode ajudar!

Hipótese: $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \ , \quad \alpha_j \in K, v_j \in E$



Calculemos o produto interno de x com os vectores de base v_i

$$\langle x,v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

Obtém-se um sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \langle v_1,v_1 \rangle & \langle v_2,v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n,v_1 \rangle \\ \langle v_1,v_2 \rangle & \langle v_2,v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n,v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1,v_n \rangle & \langle v_2,v_n \rangle & \cdots & \langle v_n,v_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x,v_1 \rangle \\ \langle x,v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x,v_n \rangle \end{bmatrix}$$

Base ortogonal

Uma base diz-se ortogonal se os vectores tiverem forem ortogonais entre si

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

Neste caso a matriz de produtos internos diagonal

$$\alpha_i = \frac{\langle x, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Exemplo

Pretende-se exprimir o vector x=[1 -1 1 -1]T como combinação linear de vectores da base não ortogonal

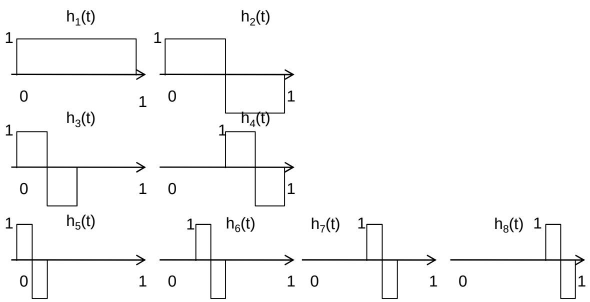
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso é preciso resolver o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo – funções de Haar

As funções de Haar formam uma base ortogonal das funções constantes por troços no intervalo [0,1].

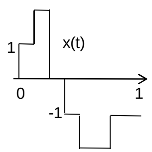


Solução:

$$\alpha_i = \frac{\langle x, h_i \rangle}{\langle h_i, h_i \rangle} = \frac{\int_0^1 x(t) h_i(t) dt}{\int_0^1 h_i(t) h_i(t) dt}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

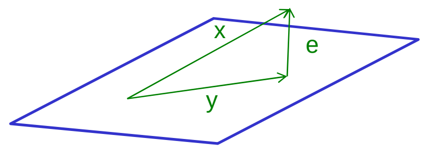
Pretende-se representar a função seguinte através de uma combinação linear de funções de Haar.



Projecção ortogonal

O que acontece quando os vectores de base geram um subespaço vectorial e o sinal a representar, x, não pertence a esse subespaço?

Mesmo neste caso, o método anterior faz o melhor que é possível. Calcula a projecção ortogonal do vector x no subespaço gerado pelos vectores de base e minimiza o erro de aproximação e.



$$y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

$$e = x - y$$