Restauração de Imagem

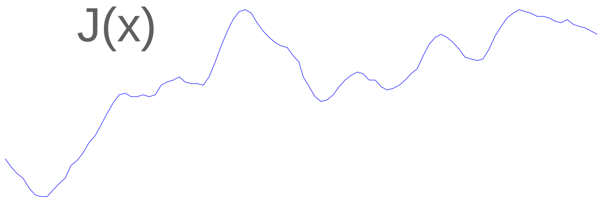
e redução de ruído

Aplicações

- imagem médica
- recuperação de imagens degradadas
- super-resolução
- compressive sensing

Degradação de imagem

$$J(x,y) = \int_0^{\Delta x} I(x+d,y)\,dd$$



há perda de informação

Modelo

$$J = T(I) + W$$

I	imagem ideal :	$I \in IR^{MNx1}$
J	imagem observada:	$J \in IR^{MNx1}$
W	imagem de ruído:	$W \in IR^{MNx1}$
T(.)	operador	$T: IR^{MNx1} \rightarrow IR^{MNx1}$

modelo linear

$$J = HI + W$$

Problema

Problema [restauração]: dada a imagem J=T(I)+W, obter a imagem I

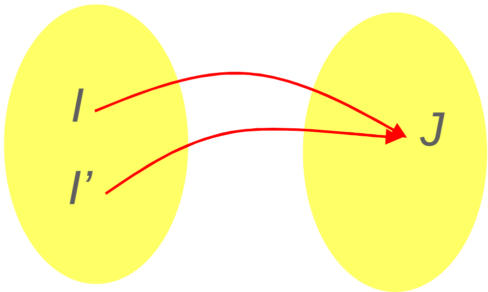
Problema [redução de ruído]: dada a imagem J=I+W, obter a imagem I

dificuldades:

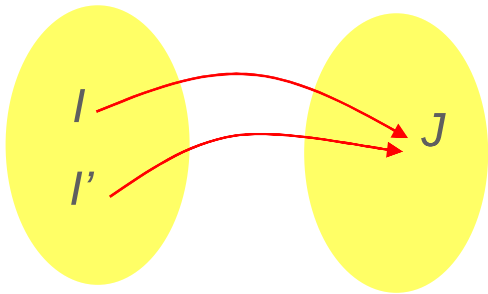
T é não invertível ou mal condicionado numericamente (J=T(I) tem um número infinito de soluções)
Não há critério para separar T(I) de W?

problema inverso

Problema inversos



não invertível



mal condicionado

Solução

métodos determinísticos

como a equação T(I)=J tem um número infinito de soluções, impõem-se condições adicionais (suavidade) à solução.

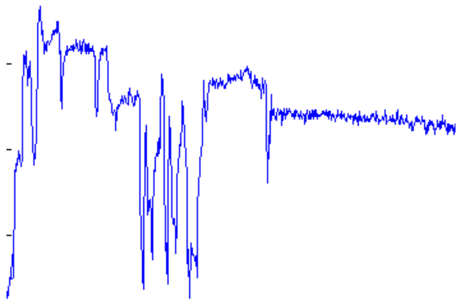
métodos de regularização

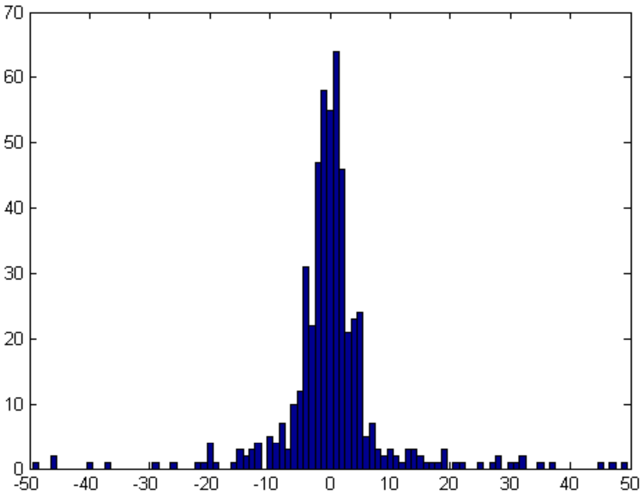
métodos probabilísticos

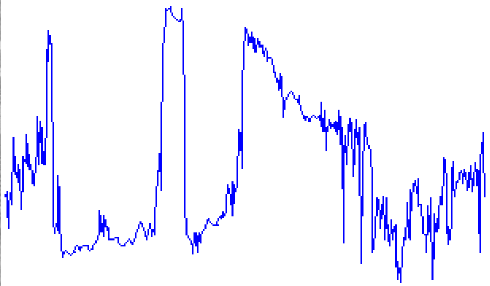
interpretar o cálculo de I como um problema de inferência estatística

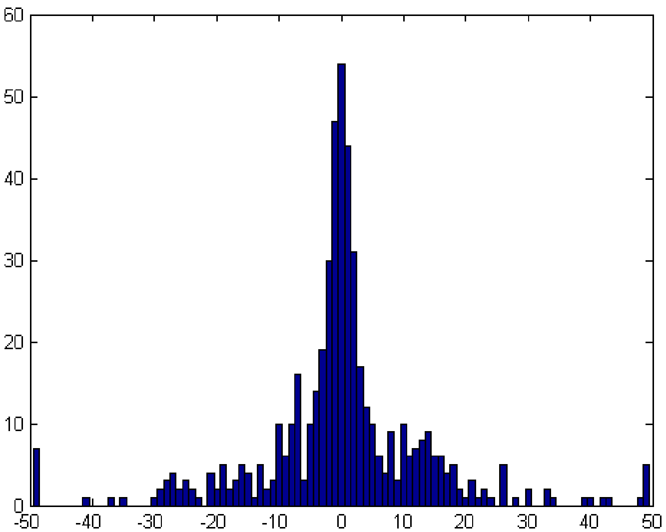
Condição de suavidade

primeira diferença









Regularização de Tikhonov

ajuste do modelo aos dados $\varepsilon = \| J - HI \|^2$

as duas normas estão definidas em espaços diferentes e podem ser diferentes

condição de suavidade $\delta = \| DI \|^2$

a escolha mais comum é a norma euclidiana (l^2).

pretende-se minimizar a condição de suavidade sob a hipótese de ε ser pequeno.

$$E = \| J - HI \|^2 + \lambda \| DI \|^2$$

λ mede o compromisso entre o ajuste aos dados e suavidade.

Solução com norma l²

$$E = (J - HI)^T (J - HI) + \lambda I^T D^T DI$$

derivando

$$\frac{dE}{dI} = -2H^T (J - HI) + 2\lambda D^T DI = 0$$

$$(H^T H + \lambda D^T D)I = H^T J$$

sistema linear de equações (de muito grande dimensão)

Algoritmo recursivo

Como resolver um sistema de grande dimensão *Mx=y* ?

$$y = Mx$$

$$x = x + \alpha(y - Mx)$$

Recursão

$$x^t = x^{t-1} + \alpha(y - Mx^{t-1})$$

$$x^t = \alpha y + (I - \alpha M)x^{t-1}$$

$$x^t = Tx^{t-1}$$

$$Tx = \alpha y + (I - \alpha M)x$$

Nota: em problemas de restauração a multiplicação de x por M é uma operação de filtragem.

Convergência

Há garantia de convergência se o operador T for uma contracção.

$$\| Tx - Tx' \| < k \, \| x - x' \| \qquad \mathrm{k} < 1$$

Se for usada a norma l^2 então a condição anterior é equivalente a

$$\max_i | 1 - \alpha \lambda_i (M) | < 1$$

Ver detalhes em Katsaggelos, Iterative image restoration algorithms, 1998.

Algoritmo recursivo (2)

Pode haver dificuldade de convergência se M tiver valores próprios positivos e negativos. Essa dificuldade pode ser ultrapassada fazendo

$$M^T y = M^T M x$$

$$x = x + \alpha M^T (y - Mx)$$

Recursão

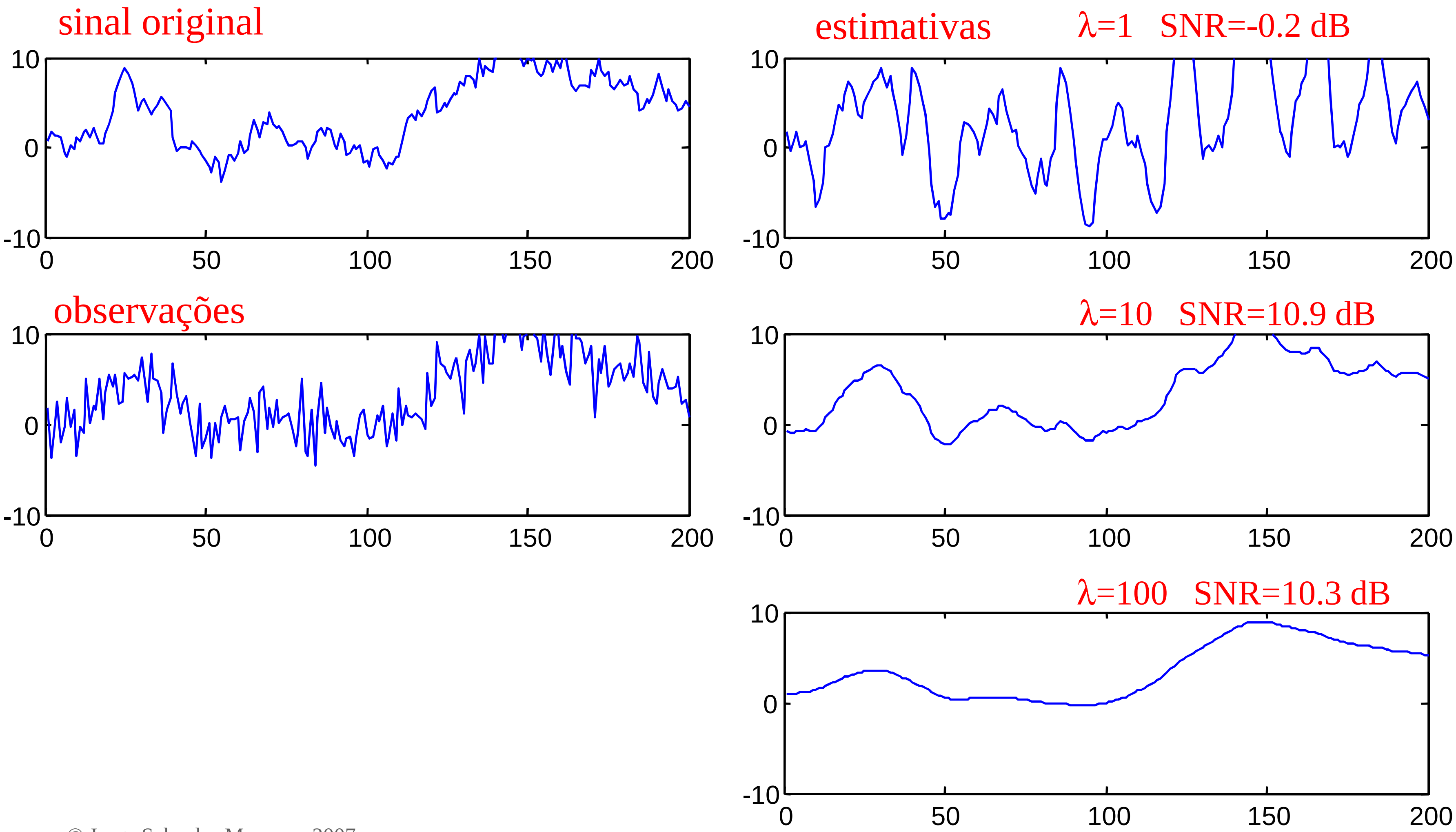
$$x^t = x^{t-1} + \alpha(M^T y - M^T M x^{t-1})$$

$$x^t = \alpha M^T y + (I - \alpha M^T M) x^{t-1}$$

Convergência

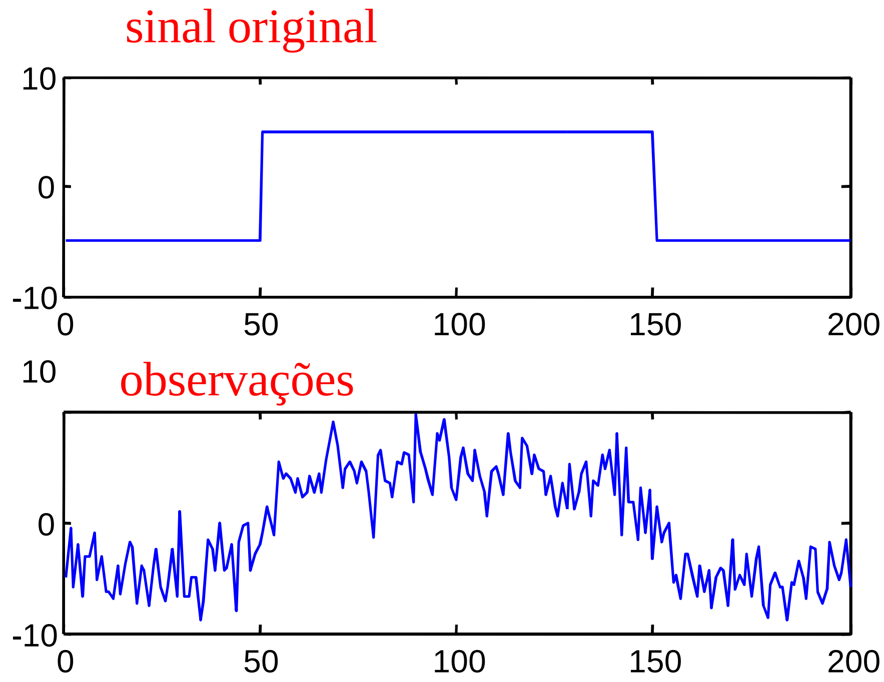
$$\max_i |1 - \alpha \lambda_i (M^T M)| < 1$$

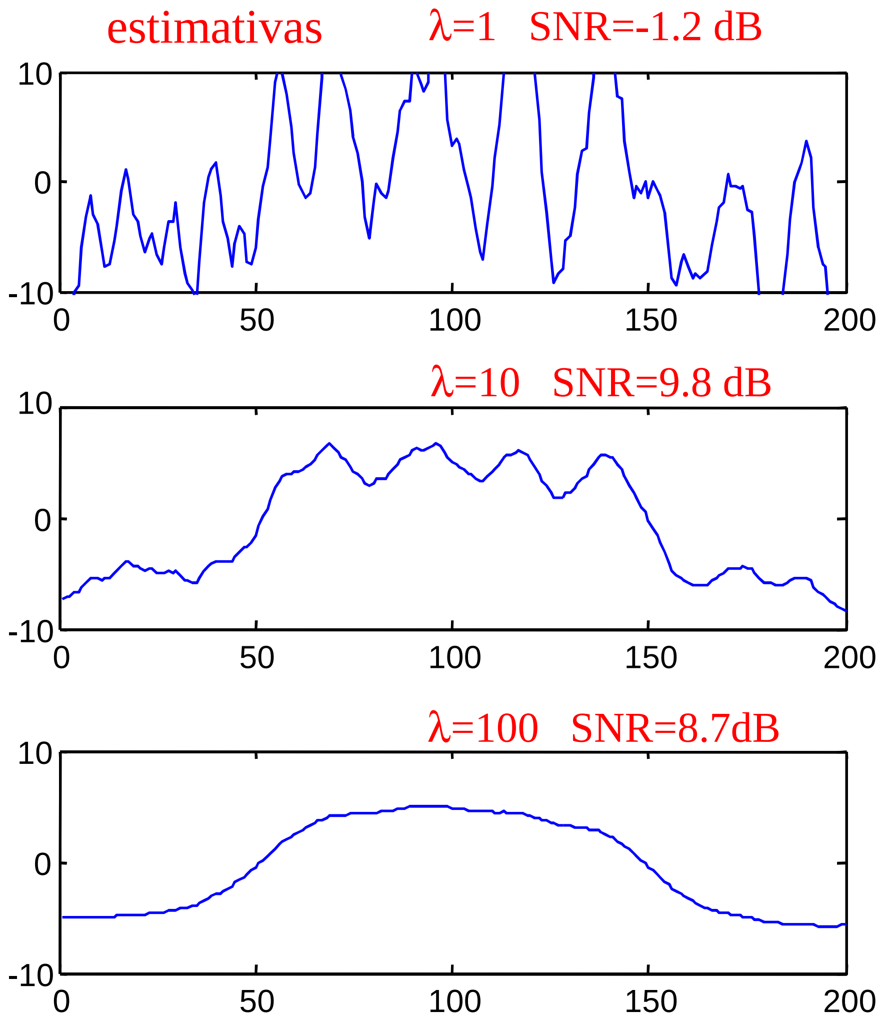
Exemplo

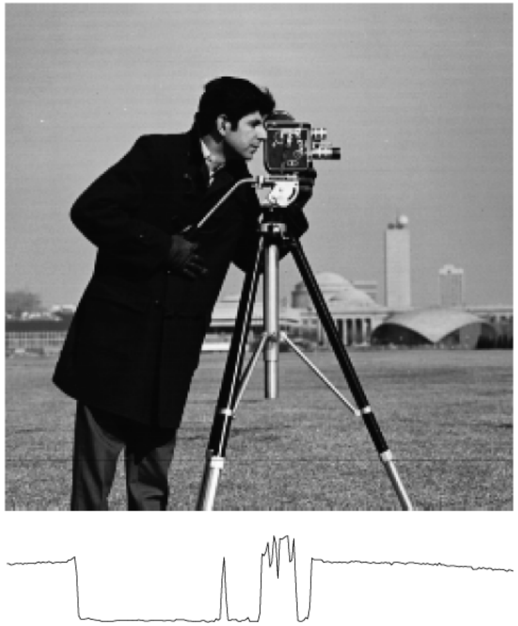


sinal original
observações
estimativas
λ=1 SNR=-0.2 dB
λ=10 SNR=10.9 dB
λ=100 SNR=10.3 dB
10
0
-10
0
50
100
150
200

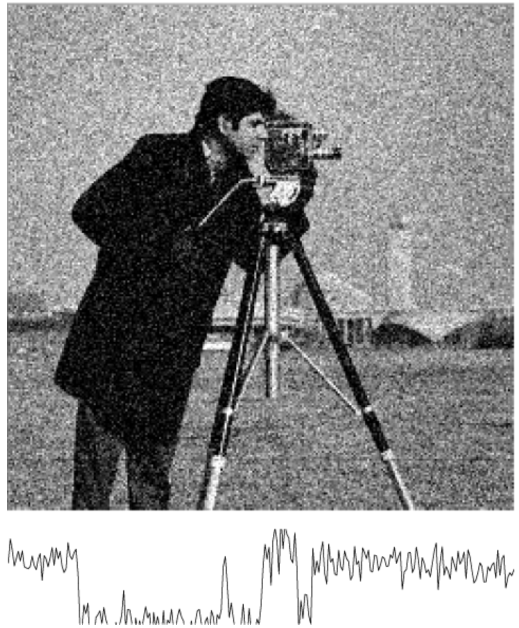
Transições abruptas



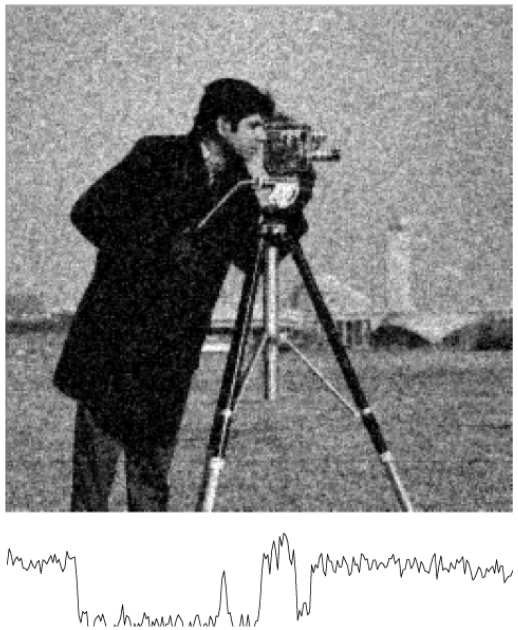




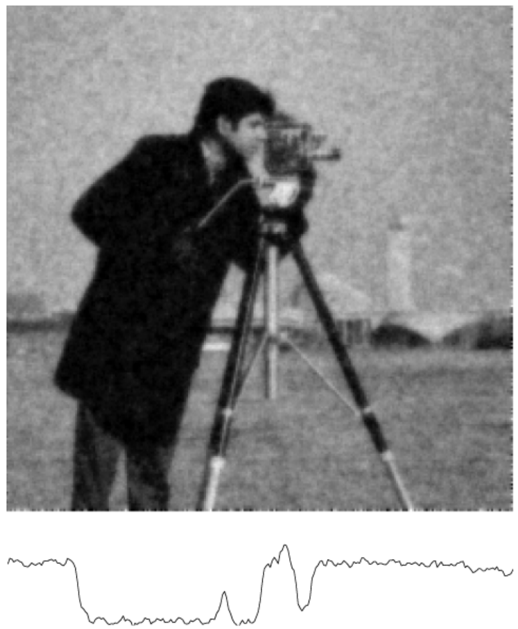
SNR=13.0dB



$\alpha=1$
SNR=17.6dB



$\alpha=8$
SNR=18.5dB

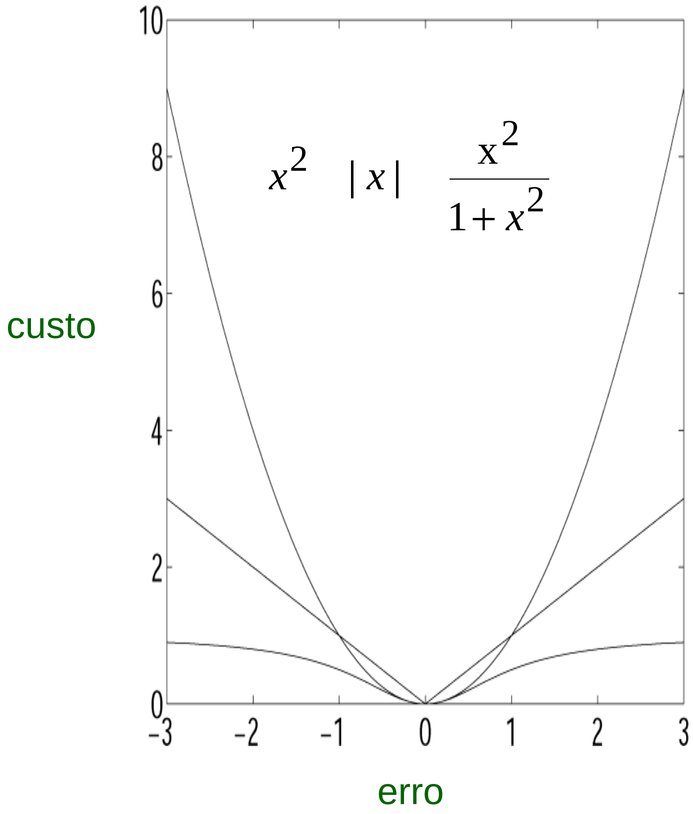


Preservação de contornos

Os métodos anteriores reduzem o ruído destruindo os contornos.

Será possível reduzir o ruído preservando os contornos?

Ideia: transições de grande amplitude devem autorizadas.



Regularização com norma l_1

Energia (caso 1D)

$$E = \| J - HI \|^2 + \lambda \sum_{i=2}^{n} |I(i) - I(i-1)| + \rho \, | I(1) |$$

$J \in R^n$, $I \in R^m$
A matriz $m \times n$,

norma l_1

norma em J: euclidiana

A minimização de E é um problema de optimização não linear.

Conversão num problema quadrático

$$E = \| J - HI \|^2 + \lambda \sum_{i=2}^{n} w(i)\, I^2(i) \; + \; \rho w(1) I(1)^2,$$

$$w(i) = \frac{1}{|I(i) - I(i-1)| + \varepsilon} \;, \quad i > 1 \qquad \text{e} \qquad w(1) = \frac{1}{|I(1)| + \varepsilon}$$

Os pesos dependem do sinal reconstruído !

recursão

Regularização: norma l1

Algoritmo recursivo

$$(H^T H + \lambda Q^j) I^j = H^T J \qquad j = 1,2,3, \ \ldots$$

em que

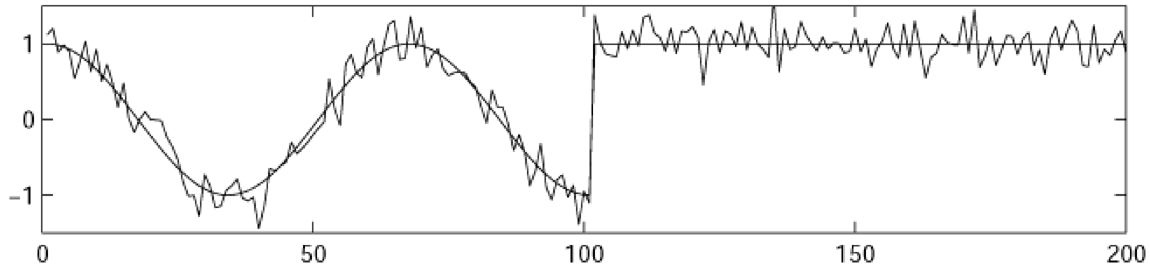
$$Q^j = \begin{bmatrix} w_2^j + \rho & -w_2^j & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ -w_2^j & w_2^j + w_3^j & -w_3^j & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & -w_3^j & w_3^j + w_4^j & -w_4^j & & & \\ \ldots & & & \ldots & \ldots & & \\ \ldots & & & \ldots & \ldots & & \\ 0 & & & 0 & -w_{n-1}^j & w_{n-1}^j + w_n^j & -w_n^j \\ 0 & & & 0 & 0 & -w_n^j & -w_n^j \end{bmatrix}$$

$$w_i^j = \frac{1}{|I_i^j - I_{i-1}^j| + \varepsilon} \qquad i > 1$$

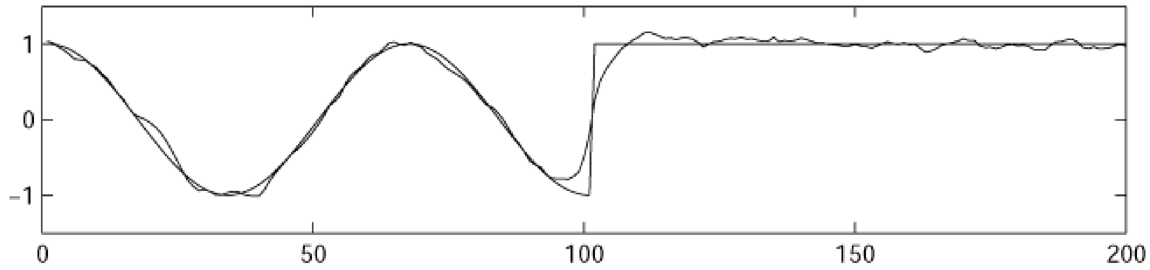
$$w_1^j = \frac{1}{|I_1^j| + \varepsilon}$$

Exemplo

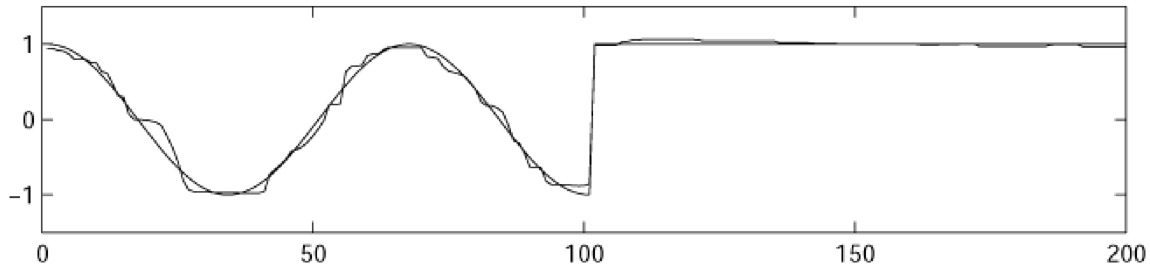
observações



norma euclidiana
SNR=17dB

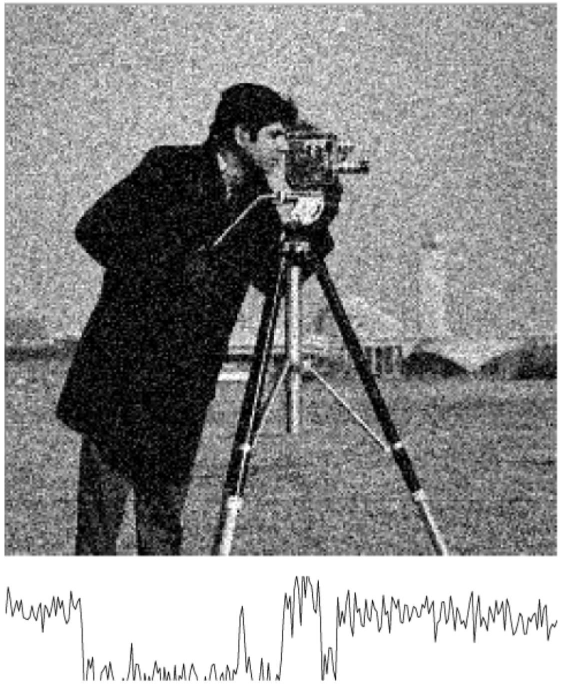


norma l_1
SNR=21.7dB

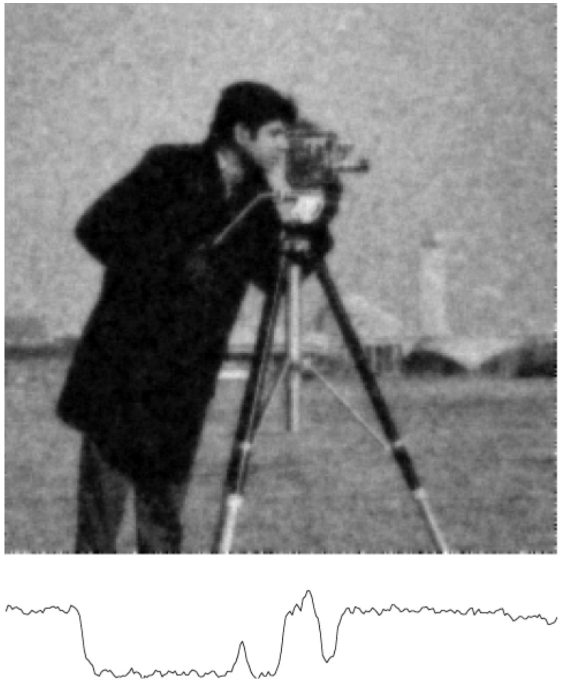


Exemplo

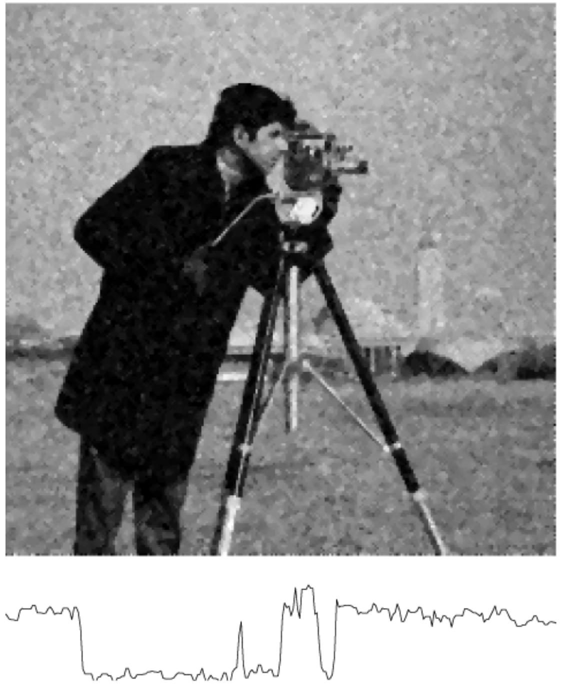
original



norma euclidiana
SNR=18,6dB



norma l_1
SNR=19.3dB



Redução de ruído: método de máxima verosimilhança

Admitamos que a degradação é linear e que o ruído é branco e gaussiano.

J = I + W W~N(0,sI)

I representa a imagem ou a matriz identidade dependendo do contexto.

Pretende-se estimar I dado J.

Função de verosimilança logarítmica

$$l(I) = \log p(J \mid I)$$

$$l(I) = \log \prod_{ij} p(J_{ij} \mid I_{ij}) = \sum_{ij} \log p(J_{ij} \mid I_{ij})$$

$$l(I) = C - \frac{1}{2\sigma^2} E(I) \qquad \mathrm{E(I)} = \sum_{ij} (J_{ij} - I_{ij})^2$$

solução (desilusão)

$$\hat{I} = J$$

Não mexer, para não estragar!

Crítica ao método de MV

Pretende-se decompor J na soma de I+W. Há infinitas maneiras de o fazer.

O método de máxima verosimilhança sugere a decomposição $\hat{I}=J$ e $W=0$ porque só usa um modelo para o ruído e não usa nenhum modelo para o sinal I.

Esta opção é a habitual nos métodos clássicos (não-bayesianos) de estimação: não se sabe nada acerca dos parâmetros antes de se observarem os dados.

Solução: usar um modelo para o sinal I

Questão: como modelar a dependência entre pixels consecutivos?

Modelo de Imagem (prior)

Um modelo simples consiste em admite-se que as primeiras diferenças

$$\delta_1(m,n) = I(m,n) - I(m-1,n) \qquad \delta_2(m,n) = I(m,n) - I(m,n-1)$$

têm distribuição normal $N(0,\sigma_0^2)$ e são independentes

Seja D o operador que transforma o vector de imagem I no vector de primeiras diferenças

$$\delta = DI \qquad \delta \sim N(0,\sigma_0^2 I)$$

Assim

$$p(\delta) = Ce^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\delta^T\delta} \qquad p(I) = C'e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}I^T D^T DI}$$

Redução de ruído: método MAP

Critério: achar a imagem mais provável, maximizando

$$p(I \mid J) = K \; p(J \mid I) \, p(I)$$

modelo dos dados (gaussiano): $p(J \mid I) = C e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|J-I\|^2}$

modelo da imagem (gaussiano): $p(I) = C' e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\|DI\|^2}$

Distribuição a posteriori: $p(I \mid J) = c \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|J-I\|^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\|DI\|^2}$

Redução de ruído: método MAP

Critério a optimizar

$$\log p(I \mid J) = C - \frac{1}{\sigma^2} \| J - I \|^2 - \frac{1}{\sigma_0^2} \| DI \|^2$$

optimização

$$\frac{d}{dI} \log p(I \mid J) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}(J - I)^T (J - I) + \frac{1}{\sigma_0^2} I^T D^T DI = 0$$

$$\frac{2}{\sigma^2}(I - J) + \frac{2}{\sigma_0^2} D^T DI = 0 \qquad \boxed{\left(\mathrm{I} + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} D^T D \right) \hat{I} = J}$$

matriz identidade

Conduz à resolução de um sistema linear de equações com tantas equações como pixels observados.

Não é realizável !!!

Algoritmo recursivo

Critério a minimizar

$$\sum_{x} (J(x) - I(x))^2 + \alpha \sum_{x,y \in V} (I(x) - I(y))^2 \qquad \alpha = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$$

Derivando em relação a $I(x_0)$ vem

$$(I(x_0) - J(x_0)) + \alpha \sum_{y \in V_{x_0}} (I(x_0) - I(y)) = 0$$

$$(1 + \alpha N_x) I(x_0) = J(x_0) + \alpha \sum_{y \in V_{x_0}} I(y)$$

$$I(x_0) = \frac{J(x_0) + \alpha N_x \bar{I}(x_0)}{1 + \alpha N_x} \qquad \bar{I}(x_0) = \frac{1}{N_{x_0}} \sum_{y \in V_{x_0}} I(y)$$

média na vizinhança 4 de x_0

Restauração de imagem: método MAP

Critério: achar a imagem mais provável, maximizando

$$p(I \mid J) = K\ p(J \mid I)\, p(I)$$

modelo dos dados (gaussiano): $p(J \mid I) = Ce^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|J-HI\|^2}$

modelo da imagem (gaussiano): $p(I) = C'e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\|DI\|^2}$

Distribuição a posteriori: $p(I \mid J) = c\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|J-HI\|^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\|DI\|^2}$

Restauração de imagem: método MAP

Critério a optimizar

$$\log p(I \mid J) = C - \| J - MI \|^2 - \alpha \| DI \|^2$$

optimização

$$\frac{d}{dI} \log p(I \mid J) = 0 \quad \Rightarrow \quad (J - MI)^T (J - MI) + \alpha I^T D^T DI = 0$$

$$(M^T MI - M^T J) + \alpha D^T DI = 0$$

$$\left(\mathrm{M}^T M + \alpha D^T D\right)\hat{I} = M^T J$$