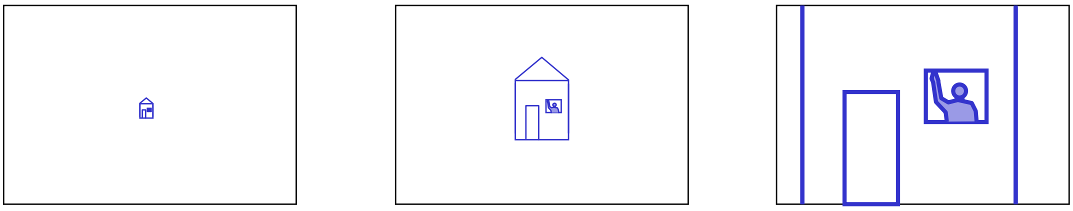
Wavelets

Motivação

Qual é a melhor escala?

Os objectos aparecem na imagem com dimensões muito diferentes.

Não uma escala única que seja apropriada. Há uma escala adequada para representar cada objecto



representações multi-escala

Espaço-escala

Define-se espaço-escala como o sinal

$$I(\mathbf{x}, s) = I(\mathbf{x}) * G_s(\mathbf{x}) \qquad G_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi s^2} e^{-\frac{\|x\|^2}{2s^2}}$$

Pirâmide gaussiana

Discretização do espaço e da escala

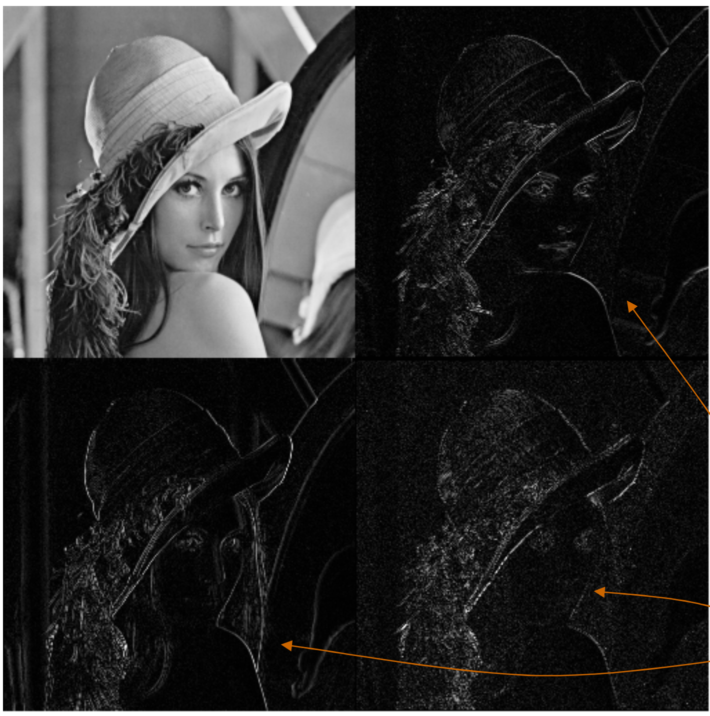
Recursão:

$$J_i(k) = I_i(k) * G_S(k) \qquad I_{i+1}(k) = J_i(2k) \qquad i = 1, \ldots, M$$

dificuldade: o número de variáveis aumenta!

Wavelets

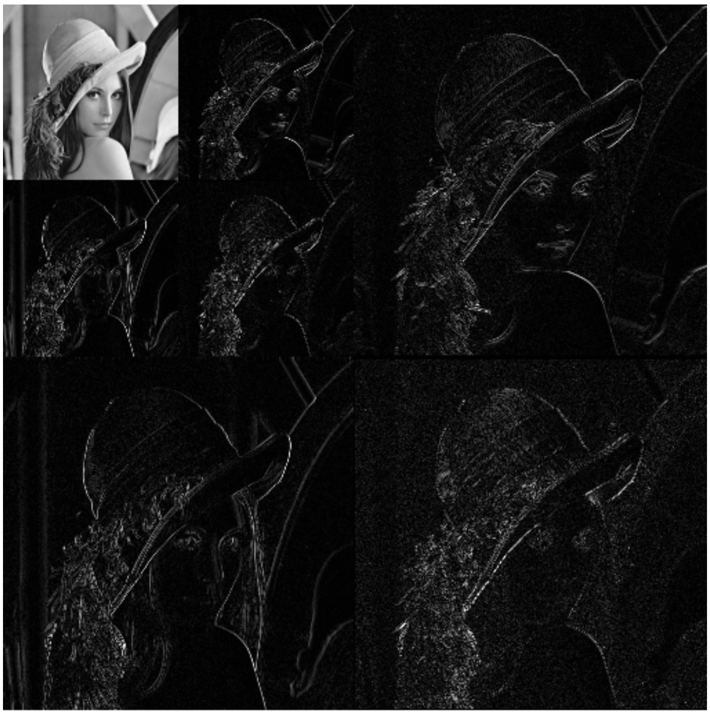
imagem de baixa resolução



As wavelets permitem obter imagens de baixa resolução mantendo toda a informação da imagem original, sem aumentar o número de coeficientes.

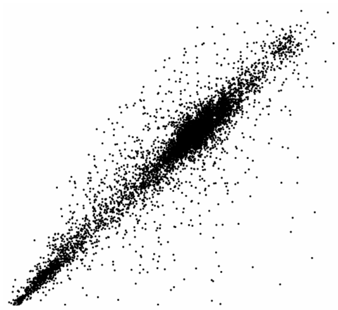
coeficientes de detalhe

Wavelets

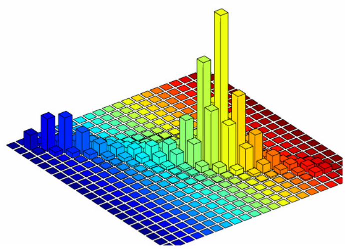


Correlação entre pixels

posição relativa dos pixels

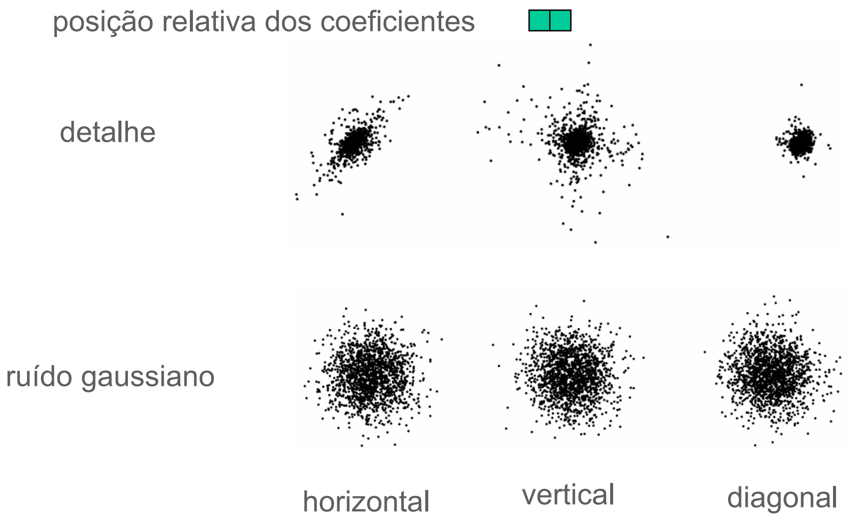


pixels vizinhos são correlacionados



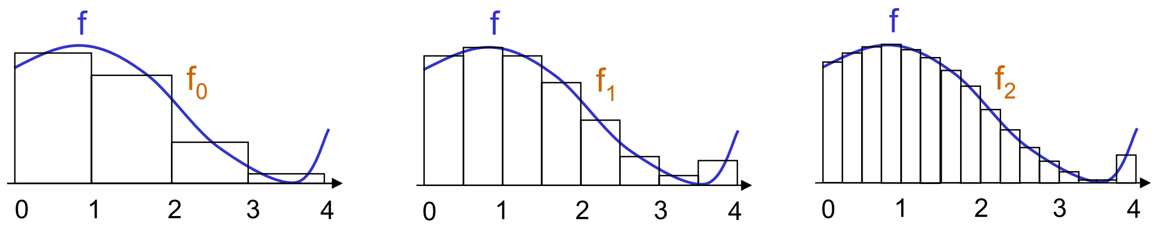
Coeficientes de detalhe

Os coeficientes de detalhe são descorrelacionados (aproximadamente).



Representação de Haar

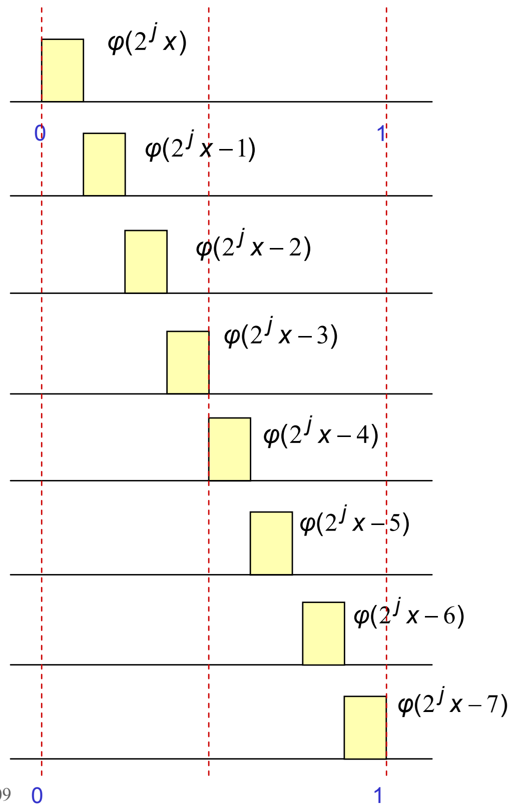
Aproximação de funções



$$f_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \varphi(2^j x - k)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

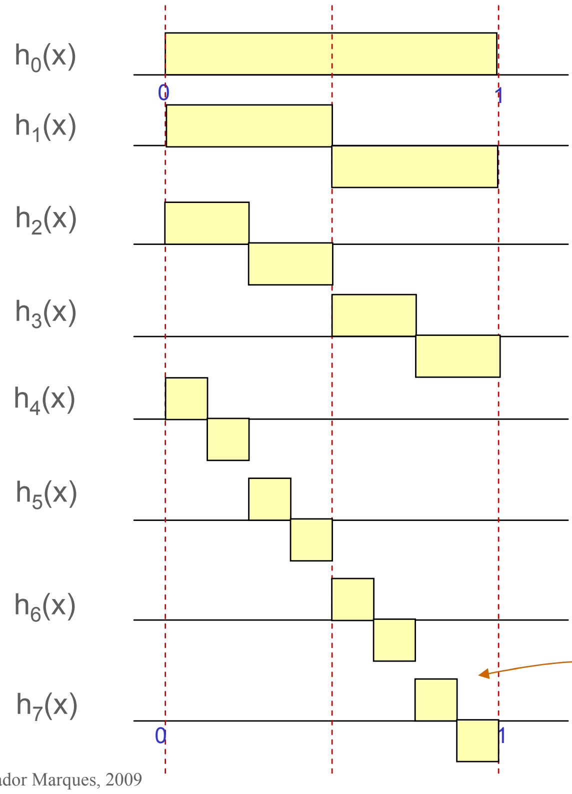
Base: impulsos rectangulares



j=3

base ortogonal

Base alternativa: funções de Haar (1909)



j=3

base ortogonal e multi-escala

gera o mesmo espaço
que a base anterior

Wavelet de Haar

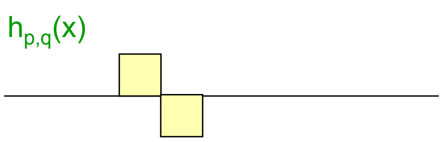
Funções de Haar

$$h_0(x) = h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

p - escala
q - deslocamento

$$h_k(x) = h_{pq}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & (q-1)/2^p \leq x < (q-0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & (q-0.5)/2^p \leq x < q/2^p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$k = 2^p + q - 1$$



Transformada de Haar

Realiza a mudança de base

$$d = Hc$$

$$c = [c_0\ c_1\ ...\ c_{N-1}\ ]^T$$
$$d = [d_0\ d_1\ ...\ d_{N-1}\ ]^T$$

Matriz de Haar

$$H_{ij} = h_i\left(\frac{j}{N}\right)$$

h_i – função de Haar

H ortogonal: $H^{-1}=H^T$

Exemplo

$$H = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

A transformação de Haar é a transformada de Wavelet mais simples!

Análise Multi-resolução

Expansão em Série

Seja f(x) uma função de quadrado integrável ($f \in L^2(IR)$)

expansão em série

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

$\varphi_k(x)$ funções de base

cálculo dos coeficientes

$$\alpha_k = <\tilde{\varphi}_k(x), f(x)> = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x)\, dx$$

$\tilde{\varphi}_k(x)$ função dual de $\varphi_k(x)$

se a base for ortonormada $\tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_k(x)$

Função de Escalamento

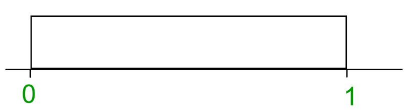
Pretende-se que as funções de base se obtenham por escalamento e deslocamento de uma função $\varphi(x)$ designada por *função de escalamento*.

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

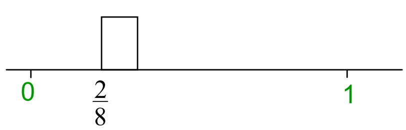
j - escala
k - deslocamento

Exemplo: função de Haar

$\varphi(x)$



$\varphi_{3,2}(x)$



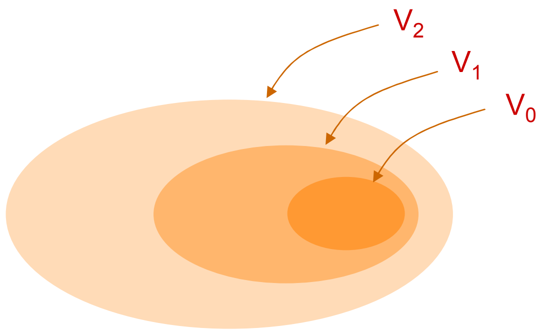
Espaço de resolução j

Designa-se por sub-espaço de resolução j, o conjunto de funções Vj que se podem escrever como combinação linear de funções $\varphi_{jk}(x)$

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_{j,k}(x)$$

Se j for escolhido cuidadosamente os conjuntos V_j são embebidos (nested)

$$V_j \subset V_{j+1}$$



Análise Multi-resolução

Uma função de escalamento φ e um conjunto de subespaços V_j por ela gerados definem uma análise multi-resolução se

1) a função de escalamento $\varphi(x)$ for ortogonal às suas versões deslocadas:

$$\varphi(x) \perp \varphi(x-k),\ \forall k$$

2) os subespaços V_j gerados por $\varphi(x-k)$, $\forall k$ são embebidos nos espaços de índice maior

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

3) a única função pertencente a todos os subespaços V_j é a função nula

4) qualquer função de quadrado integrável f pode ser aproximada com precisão arbitrária por uma função de V_j.

Equação de dilatação

Como $\varphi(x)$ pertence a V_0, também pertence a V_1 também

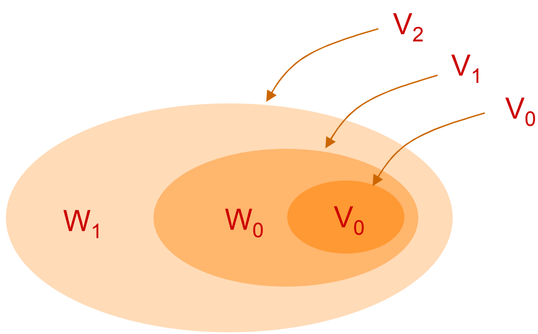
Assim pode exprimir-se como combinação linear das funções de base de V_1.

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2}\, \varphi(2x - n)$$

coeficientes da função de escalamento

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n)\, \varphi_{2,n}(x)$$

Espaços ortogonais



$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

soma directa de sub-espaços

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_j$$

W_j é um subespaço vectorial

Wavelets

Se $\{V_j\}$ for uma análise multi-resolução então existe uma função $\psi(x)$ (wavelet) tal que

1) as funções wavelets $\psi_{jk}(x)=2^{j/2}\,\psi(2^j x-k)$ são uma base de W_j

2) $\varphi_{jk}(x) \perp \psi_{jm}(x) \quad \forall j,k,m$

Pode-se provar que

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n)\sqrt{2}\,\varphi(2x-n)$$

e que

$$h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(n)$$

Desenho da função de escalamento

O desenho da função de escalamento $\varphi(x)$ e respectiva wavelet $\psi(x)$ não é abordada neste curso. Há várias famílias de funções propostas (p.ex., por Daubechies).

O caso mais simples é o impulso rectangular (Haar)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

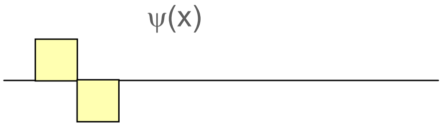
Exemplo

Admitamos que φ é a função de Haar

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & c.c.\end{cases} \qquad \varphi(x)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x-1)$$

Assim

$$h_\varphi(n)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & n=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & n=1\\ 0 & c.c.\end{cases} \qquad h_\psi(n)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & n=0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & n=1\\ 0 & c.c.\end{cases} \qquad \psi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<0.5\\ -1 & 0.5\le x<1\\ 0 & c.c.\end{cases}$$



Expansão em série de wavelets

Como

$$L^2(IR)=V_{j_0}\oplus W_{j_0}\oplus W_{j_0+1}\oplus W_{j_0+2}\ldots$$

se f(x) for um sinal de quadrado integrável

$$f(x)=\sum_k c_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d_{j,k}\psi_{j_0,k}(x)$$

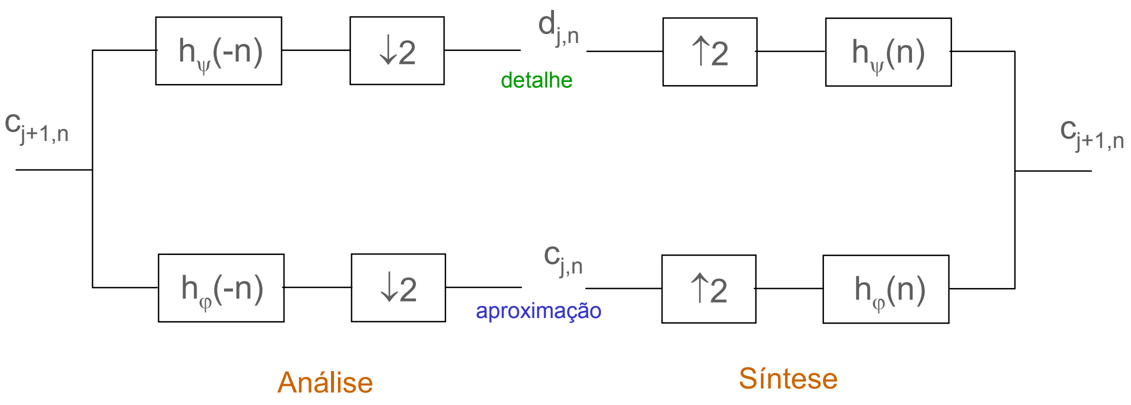
$c_{j_0,k}$ coeficientes de aproximação

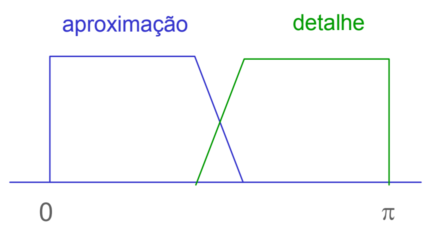
$d_{j,k}$ coeficientes de detalhe

$$c_{j,k}=<f(x),\varphi_{jk}(x)> \qquad d_{j,k}=<f(x),\psi_{jk}(x)>$$

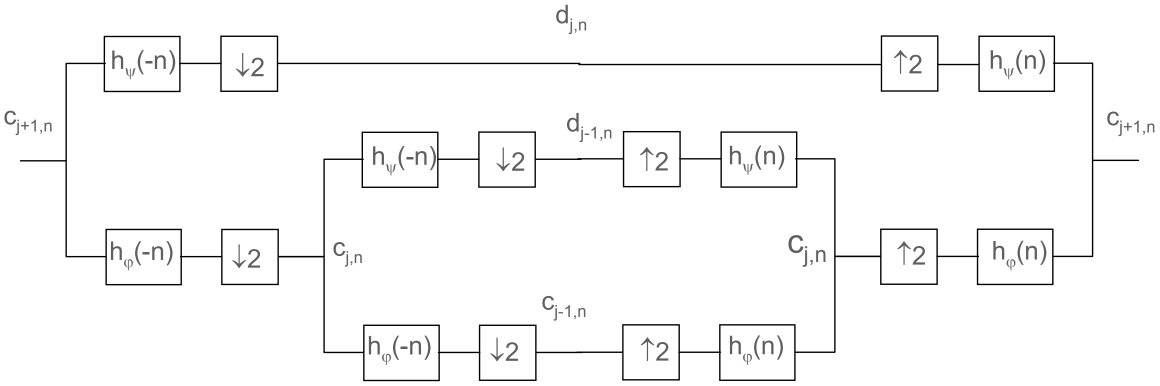
Transformada de wavelet rápida

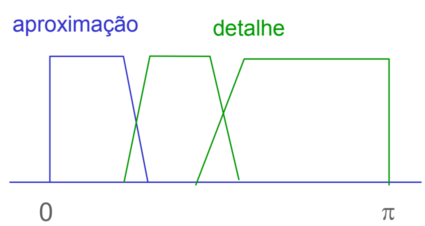
O cálculo dos coeficientes de aproximação e de detalhe pode ser feita através de um banco de filtros





Transformada multi-escala





Exemplo

Filtros associados à wavelet de Haar

$$h_\varphi(n) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta(n) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta(n-1)$$

$$h_\psi(n) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta(n) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta(n-1)$$

sinal

$$f(n) = [0\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 4]$$

Transformada de wavelet rápida

$$f(n) * h_\varphi(-n) = \frac{1}{\sqrt{2}}[2\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ 0\ \ -1\ \ 4\ \ 4] \xrightarrow{\downarrow 2} c_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[2\ \ 4\ \ 0\ \ 4]$$

$$f(n) * h_\psi(-n) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-2\ \ 1\ \ -2\ \ 2\ \ 2\ \ -1\ \ -4\ \ 4] \xrightarrow{\downarrow 2} d_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-2\ \ -2\ \ 2\ \ -4]$$

$$\uparrow 2(c_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[2\ \ 0\ \ 4\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 0] \xrightarrow{*h_\varphi(n)} [1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 2]$$

$$\uparrow 2(d_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-2\ \ 0\ \ -2\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 4\ \ 0] \xrightarrow{*h_\psi(n)} [-1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ -1\ \ -2\ \ 2]$$

0 2 1 3 1 -1 0 4

Representação de Imagens

Como representar imagens discretas usando wavelets?

Há 2 dificuldades:

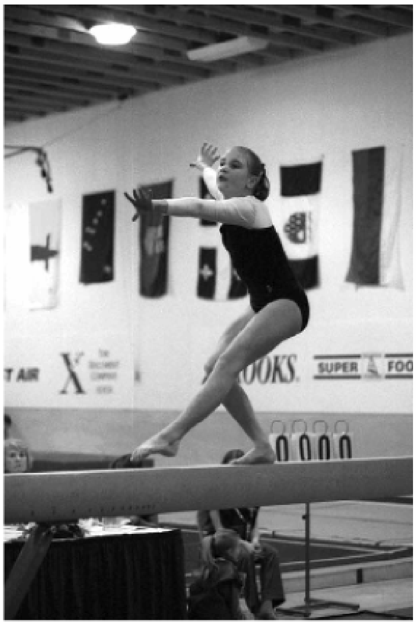
a imagem é discreta

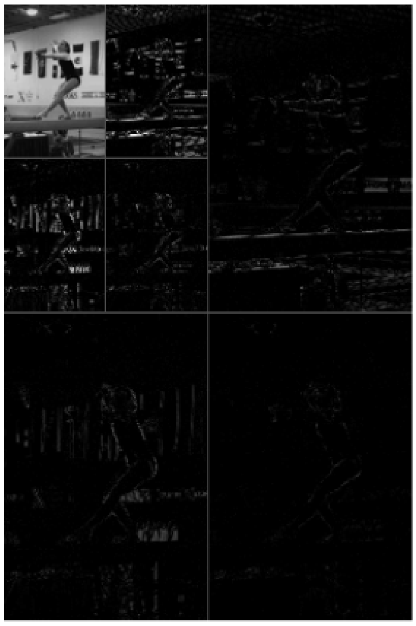
depende de duas variáveis independentes

1ª questão (sinal discreto): dado um sinal discreto, pode-se admitir que os valores do sinal I(n) são os coeficientes de ordem j, $c_{j,m,}$ e aplicar wavelets para obter os coeficientes de resoluções mais baixas.

2ª questão (sinal bidimensional): aplicar a transformada de Haar a cada coluna da imagem e depois aplicar a transformada de Haar a cada linha da matriz resultante.

Exemplo





Leituras sugeridas

S. G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: A Wavelet Representation," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol 11, No. 7, July 1989.

Gonzalez, Woods, Digital Image Processing, Prentice Hall, 2008