Exame de Recurso

Processamento Digital de Sinais, 2008/09

Parte I

1. **[SLIT]** Considere um sistema linear invariante no tempo com função de transferência $H(z) = 1/(1 - \frac{1}{2}z^{-1}),\ \ |z| > 1/2$.

   a) Classifique o sistema quanto à causalidade e estabilidade,

   b) descreva o sistema através de uma equação às diferenças,

   c) calcule a resposta impulsiva e resposta em frequência do sistema,

   d) calcule a resposta do sistema a uma entrada

   $$x(n) = 3^n u(-n-1)\ .$$

2. **[análise espectral]** Pretende-se analisar um sinal sinusoidal $x(n) = A\cos(\omega n + \phi),\ n = 0, \ldots, N-1$ usando uma DFT de comprimento N. Como pode determinar a frequência ω a partir da DFT admitindo que a frequência

   a) ω é múltipla de $2\pi/N$,

   b) ω não é múltipla de $2\pi/N$.

   Justifique matematicamente.

3. **[tempo-frequência]** Considere um sinal $x(n)$ de comprimento $N = 8$ do qual se conhecem 6 valores, $x(0) = 1, x(1) = -\sqrt{2}/2, x(2) = -2x(4) = 3, x(6) = -2, x(7) = -\sqrt{2}/2$. Sabendo que o sinal $x(n)$ é passa baixo e a sua DFT tem coeficientes nulos, $X(3) = X(4) = X(5) = 0$, determine os valores desconhecidos do sinal $x(n)$ e a sua DFT.

4. * **[sinais longos]** Considere um sinal $x(n)$ com comprimento $10N$. Pretende-se calcular o espectro de $x(n)$ em frequências múltiplas de $2\pi/N$ usando uma única DFT de comprimento N. Diga como procederia. Justifique matematicamente.

* problema de dificuldade superior, deixe para o fim.

cotação: 1) 2.5v; 2) 2.5v; 3) 2.5v; 4) 2.5v;

Parte II

1. **[identificação de sistema]**Considere um sistema linear

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Dadas N amostras da entrada e saída $\{(x(n), y(n)), n = 0, \dots, N-1\}$, estime os parâmetros do sistema usando o método de mínimos quadrados.

2. **[estimação de sinusóides]**Pretende-se estimar a amplitude da componente em fase e em quadratura de um sinal sinusoidal com frequência conhecida. As observações são dadas por

$$x(n) = A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n) + w(n) \qquad n = 0, \dots, N-1$$

em que $w(n)$ é ruído branco com distribuição $w(n) \sim N(0, \sigma^2)$

a) determine a função de verosimilhança

b) calcule o estimador de máxima verosimilhança de A, B

c) calcule o limiar de Cramer-Rao.

3. **[redução de ruído]** Considere um sinal aleatório de comprimento finito $x = (x(0), \dots, x(N-1))$ com distribuição de probabilidade

$$p(x) \propto \prod_{n=1}^{N-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x(n)-x(n-1))^2}$$

Admita que x é desconhecido e que conhece um conjunto de observações $y = (y(0), \dots, y(N-1))$ corrompidas por ruído aditivo

$$y(n) = x(n) + w(n)$$

em que $w(n)$ é ruído branco com distribuição $N(0, \sigma^2)$. Calcule a distribuição *a posteriori* de x depois de conhecidas as observações y. Calcule o estimador de MAP (máximo a posteriori) de x.

4. **[barco perdido]** Um barco encontra-se numa posição aleatória $x_0 \in \mathbb{R}$ que segue uma distribuição normal $N(0, 1)$. Passada 1 hora o barco encontra-se numa nova posição x_1 que é descrita pelo modelo de movimento

$$x_1 = a x_0 + w_1$$

em que w_1 é uma perturbação aleatória com distribuição normal $N(0, q)$. Em seguida realiza-se uma medida y_1 sobre a posição do barco descrita pelo modelo

$$y_1 = c x_1 + v_1$$

em que $v_1 \sim N(0, r)$ é ruído de observação. Admite-se que w_1, v_1 são independentes entre si e em relação a x_0. Calcule a distribuição de x_1 antes e depois de observar y_1. Demonstre todos os passos.

cotação: 1) 2.5v; 2) 2.5v; 3) 2.5v; 4) 2.5v;