Exame e Teste #2

Processamento Digital de Sinais, 2008/09

Parte I

1. Considere um sistema linear e invariante no tempo com função de transferência

$$H(z) = \frac{z-1}{(z-\frac{1}{2})(z+2)}$$

a) discuta a estabilidade e causalidade do sistema

b) calcule uma equação às diferenças para o sistema

c) determine a resposta impulsiva, admitindo que o sistema é estável

d) determine a resposta do sistema a uma entrada $x(n) = (-1)^n$.

2. Considere dois sinais discretos $x(n), y(n)$ de comprimento $N = 8$. Sabe-se que

$$x(n) = \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{1 + \left|\sin(\frac{\pi n}{2})\right|} \qquad Y(k) = DFT\{y(n)\} = \delta(k-3)$$

Calcule

a) a DFT do sinal $y((n-3))_N R_N(n)$, em que $R_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

b) a convolução circular dos sinais $x(n), y(n)$.

3. Pretende-se projectar um filtro FIR, passa-alto, de comprimento N e frequência de corte $\omega_c = .25\pi$ rad.

a) calcule a resposta em frequência e a resposta impulsiva do filtro ideal

b) obtenha a resposta do filtro FIR através do método das janelas.

4. * **[sub-amostragem]** Considere um sinal $x(n)$ com resposta em frequência $H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{|\omega|}{\pi}$, para $\omega \in [-\pi, \pi]$.

a) calcule a resposta em frequência do sinal $y(n) = x(2n)$ e desenhe o espectro de $y(n)$. Esta operação corresponde a uma mudança de ritmo de amostragem

b) comente o aliasing e as medidas que poderá tomar para resolver o problema.

Sugestão: multiplique o sinal $x(n)$ por um sinal que seja 1 nas amostras pares e 0 nas amostras ímpares.

* problema de maior difículdade; sugiro que deixe este exercício para o fim do exame.

cotação do exame: 1) 3v; 2) 2.5v; 3) 2.5v; 4) 2v; cotação do teste #2: 1) 0v; 2) 0v; 3) 0v; 4) 0v;

Parte II

1. **[aproximação de sinais]** Pretende-se aproximar um conjunto de dados experimentais $(x_1, y_1), \ldots,$ (x_n, y_n) através de um polinómio de 2ª ordem

$$\hat{y} = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

em que c_0, c_1, c_2 são coeficientes desconhecidos

a) aplique o método de mínimos quadrados ao problema

b) obtenha um sistema de equações lineares para os coeficientes

2. Considere uma sequência de variáveis aleatórias $x_1, x_2, ..., x_n$ independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial $p(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} u(x)$ em que β é um parâmetro a estimar.

a) Determine o limiar de Cramer-Rao para este problema

b) considere o estimador $\hat{\beta} = \bar{x}$ em que $\bar{x}$ é a média aritmética das observações. Determine a variância de $\bar{x}$ e verifique se o estimador é eficiente.

3. **[predição]** Considere um sinal aleatório $x(0), x(1), \ldots, x(m)$, gerado através de uma equação às diferenças

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + w(n)$$

em que $a = (a_1, a_2)$ é um vector de coeficientes desconhecidos e $w(n)$ é ruído branco gaussiano com distribuição $N(0, \sigma^2)$.

a) determine a função de verosimilhança $L(a)$

b) calcule o estimador de máxima verosimilhança de a

c) calcule a matriz de informação de Fisher e o limiar de Cramer-Rao.

4. **[interpolação]** Considere um sinal aleatório $x = (x(1) \ldots x(n))$ desconhecido, com distribuição

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_i - x_{i-1})^2}, \qquad x_0 = 0$$

A medição de x é cara e por isso, é realizada apenas em alguns instantes de tempo. Assim dispõe apenas $m < n$ observações válidas sendo as restantes nulas. Assim, conhecem-se as observações $y_i = b_i(x_i + w_i)$ em que $b_i \in \{0, 1\}$ é um interruptor binário com valor conhecido que permite ou não a realização da observação); $w_i \sim N(0, \sigma^2)$ é ruído aditivo descorrelacionado. Pretende-se estimar o sinal x conhecendo y ou seja, pretende-se realizar simultaneamente as operações de redução de ruído e de interpolação do sinal.

Formule o problema de estimação num contexto bayesiano e obtenha as equações do estimador de *máximo a posteriori*.

boa sorte!

cotação do exame: 1) 2v; 2) 2v; 3) 3v; 4) 3v; cotação do teste #2: 1) 4v; 2) 4v; 3) 6v; 4) 6v;