NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

PEDRO MARIA PINA ASSOREIRA NUNES PEREIRA

Licenciado em Ciências da Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

APLICAÇÕES DE CONTROLO PREDITIVO BASEADO EM MODELOS PARA O RENDEZVOUS COOPERATIVO DE SATÉLITES

MESTRADO EM ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Universidade NOVA de Lisboa
Março, 2022

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

APLICAÇÕES DE CONTROLO PREDITIVO BASEADO EM MODELOS PARA O RENDEZVOUS COOPERATIVO DE SATÉLITES

PEDRO MARIA PINA ASSOREIRA NUNES PEREIRA

Licenciado em Ciências da Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Orientador: Bruno João Nogueira Guerreiro, PhD
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

Coorientador: Pedro António Duarte Marques Lourenço, PhD
Engenheiro GNC, GMV

Júri:

Presidente: Nuno Filipe Silva Veríssimo Paulino
Professor Associado com Agregação, FCT-NOVA

Arguente: Rui Alexandre Nunes Neves da Silva
Professor Associado, FCT-NOVA

Orientador: Bruno João Nogueira Guerreiro
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

MESTRADO EM ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Universidade NOVA de Lisboa
Março, 2022

Aplicações de Controlo Preditivo baseado em Modelos para o Rendezvous Cooperativo de Satélites

Copyright © Pedro Maria Pina Assoreira Nunes Pereira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.
A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Para os meus amigos e família...

Agradecimentos

Tenho em primeiro lugar de agradecer ao meu orientador, Professor Bruno Guerreiro, pelo contínuo suporte e paciência durante estes meses e por estar sempre disponível para me guiar e ensinar. Graças ao Professor consegui não só aprofundar um tema que é uma paixão minha, a área de Aeroespacial, mas também aprendi a ser mais proativo, ter uma visão mais global face aos problemas que estou a ter e em geral ser um melhor Engenheiro. Tenho de agradecer também ao meu coorientador, Doutor Pedro Lourenço, pelas recomendações inestimáveis que me tem fornecido, que permitiram ter uma competência mais abrangente desta área e pela disponibilidade em aceitar este desafio, sempre com rigor e com atenção ao meu trabalho.

Apesar de não estar directamente envolvido na dissertação tenho de agradecer também ao Professor José Barata por me guiar e influenciar durante o Mestrado, não só para ser um melhor Engenheiro mas uma melhor pessoa. Foi uma honra ser seu estudante e sem a sua compaixão, que demonstrou desde o meu primeiro ano, não teria feito a dissertação para ser Engenheiro Electrotécnico. O mesmo posso dizer ao Professor Filipe Moutinho que tenho de agradecer por me aturar durante tanto tempo e por sempre estar disponível para me ajudar. E finalmente tenho de agradecer a todos os Professores da FCT-NOVA que me ajudaram e ensinaram nesta incrível viagem de cinco anos.

Tenho de agradecer também a todos os meus colegas e amigos, tanto aqueles que conheci durante a Faculdade como aqueles que já conhecia, sabendo que sem eles o curso não teria sido a mesma coisa. O curso não se faz sozinho e ter um grupo de apoio e suporte como o nosso é algo raro de que me vou lembrar. Dito isto, tenho que realçar o meu bom amigo Tomás, alguém que esteve comigo antes, durante e espero também depois da Faculdade.

Finalmente, tenho que mostrar meu agradecimento à minha família, pais, irmãos, avós e tios por apoiar-me e suportar-me com todas as minhas falhas. Cada um de vocês influenciou-me de alguma forma, e eu tenho que reconhecer isso.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelos projetos CAPTURE (PTDC/EEI-AUT/1732/2020) e REPLACE (PTDC/EEI-AUT/32107/2017) da FCT, que incluem os fundos Lisboa 2020 e PIDDAC, e também pelo projeto CTS (UIDB/EEA/00066/2020).

Resumo

Numa missão espacial a manobra de *rendezvous* para satélites é uma das etapas mais importantes e difíceis de realizar, permitindo aproximar dois satélites em órbita para depois serem fisicamente acoplados ou para interagirem entre si. Esta dissertação aborda o problema de *rendezvous* num contexto cooperativo, apresentando dois problemas complementares, nomeadamente o pelotão de múltiplos satélites e o serviço de satélites em órbita, utilizando o Controlo Preditivo baseado em Modelos (MPC). Com as soluções propostas, estes cenários de formação espacial podem ser considerados como um sistema cooperativo composto por vários satélites com um objetivo comum, o que pode ter grandes vantagens em relação a outras abordagens.

Para cada cenário, um diferente modelo dinâmico, problema de optimização e configuração do MPC é apresentado, incluindo restrições relevantes para lidar com limitações físicas, problemas de visibilidade e também para garantir uma trajetória livre de colisões de outros satélites ou obstáculos. No entanto, tal como é habitual para as manobras de *rendezvous*, considera-se apenas o movimento relativo entre os satélites, tanto translacional como rotacional. No cenário de pelotão, diferentes algoritmos distribuídos e topologias de rede são apresentados de maneira a interligar os diferentes agentes do sistema, isto tendo em consideração uma formação líder-seguidor, que são depois analisados em termos de convergência e unicidade da ação de controlo óptima. Já no cenário de serviço é considerado uma dinâmica não linear cooperativa que através da atitude relativa consegue determinar a orientação desejada do satélite seguidor.

Os métodos propostos são validados com resultados de simulação, mostrando que todos os veículos apresentam desempenho fidedigno seguindo uma determinada trajetória ou objetivo numa formação, enquanto satisfazem todas as restrições consideradas.

Palavras-chave: MPC, *Rendezvous*, Controlo Cooperativo, Pelotão de Satélites, Serviço de Satélites em Órbita

Abstract

In a space mission the rendezvous maneuver for satellites is one of the most important and difficult steps to perform, allowing to bring two satellites closer in order to physically couple or to interact with each other. This dissertation approaches the problem of rendezvous in a cooperative context, addressing two complementary problems, namely, satellite platooning and on-orbit satellite servicing, using Model Predictive Control (MPC). With the proposed solutions, these space formation scenarios can be regarded as a cooperative system composed of several spacecraft with a common goal, which may have clear advantages relative to other approaches.

For each application scenario, a different dynamic system model, optimization problem and MPC design is presented, including relevant constraints to deal with physical limitations, visibility problems, and also to guarantee a collision-free trajectory from other satellites or obstacles. However, as usual for the rendezvous maneuvers, only the relative motion between satellites is considered, accounting for both translational and rotational motions. For the platooning scenario, different distributed algorithms and network topologies are presented in order to connect the different agents, taking into account a leader-follower formation, which are then analyzed in terms of convergence and uniqueness of the optimal control action. In the service scenario, a cooperative nonlinear dynamic system is considered, where the desired orientation of the follower satellite is determined by the relative attitude.

The proposed methods are validated with simulation results, showing that all vehicles demonstrate reliable performance following a given trajectory or goal in a formation, while satisfying all the considered constraints.

Keywords: MPC, Rendezvous, Cooperative Control, Satellite Platooning, Satellite On-Orbit Servicing

Índice

Índice de Figuras xi

Índice de Tabelas xiii

Índice de Listagens xiv

Siglas e Acrónimos xv

Símbolos xvii

1 Introdução 1
- 1.1 Motivação e Contexto . . . 2
- 1.2 Definição do Problema a Resolver e Solução Proposta . . . 3
- 1.3 Estrutura da Dissertação . . . 4

2 Revisão Bibliográfica e História 5
- 2.1 Rendezvous de Satélites . . . 6
- 2.2 Controlador Preditivo baseado em Modelos (MPC) . . . 10
- 2.3 Formação de Voo . . . 12

3 Fundamentos Teóricos 16
- 3.1 Referenciais . . . 17
- 3.2 Cinemática de Corpos Rígidos . . . 18
  - 3.2.1 Matriz de Rotação . . . 18
  - 3.2.2 Quaterniões . . . 19
  - 3.2.3 Ângulos de Euler . . . 21
- 3.3 Dinâmica Translacional Relativa . . . 23
- 3.4 Dinâmica Rotacional Relativa . . . 27
- 3.5 Controlo Óptimo . . . 29
  - 3.5.1 Problema de Regulação Linear Quadrática (LQR) . . . 30
  - 3.5.2 Problema de Seguimento Linear Quadrático (LQT) . . . 31

3.6 Controlador Preditivo baseado em Modelos (MPC) 33
3.6.1 Problema de Regulação para o MPC Linear sem Restrições . . . 34
3.6.2 Problema de Seguimento para o MPC Linear sem Restrições . . 34

4 MPC Linear para Rendezvous de Dois Satélites 35
4.1 Dinâmica do Sistema 36
4.2 Problema de Controlo Óptimo 38
4.3 Restrições 39
4.3.1 Restrição de Ação de Controlo 39
4.3.2 Restrição de Velocidade 39
4.3.3 Restrição de Desvio de Obstáculos 40
4.3.4 Restrição de Linha de Visão (LOS) 42
4.4 Simulação e Resultados 43

5 MPC Distribuído para Pelotão de Múltiplos Satélites 48
5.1 Dinâmica do Sistema 50
5.2 Problema de Controlo Óptimo 53
5.3 Algoritmo Distribuído 55
5.4 Simulação e Resultados 56

6 MPC Distribuído para Pelotão de Múltiplos Satélites com Topologia de Rede 64
6.1 Dinâmica do Sistema 65
6.2 Problema de Controlo Óptimo 67
6.3 Algoritmo Distribuído 71
6.4 Topologias de Rede 73
6.5 Simulação e Resultados 75

7 MPC Não Linear para Serviço de Satélites em Órbita 82
7.1 Dinâmica do Sistema 84
7.2 Problema de Controlo Óptimo 85
7.3 Restrições 86
7.4 Planeamento da Atitude Relativa Desejada 87
7.5 Simulação e Resultados 89

8 Conclusões e Trabalho Futuro 94
8.1 Conclusões 94
8.2 Trabalho Futuro 96

Bibliografia 98

Anexos

I Dedução das Equações de Clohessy-Wiltshire-Hill 110

I.1 Problema de N-corpos 110
I.2 Equações Não Lineares de Movimento Relativo 111
I.3 Equações Não Lineares de Movimento Relativo para Órbitas Circulares 112
I.4 Linearização das Equações de Movimento Relativo para Órbitas Circulares 112

Índice de Figuras

2.1 Fases de aproximação de um satélite para o outro, adaptado de [3] 7
2.2 Exemplos de missões espaciais com recurso ao *rendezvous* 8
2.3 Acoplamento da Crew Dragon (SpaceX) à ISS [19] 9
2.4 Exemplos de topologias para formação de voo de satélites, adaptado de [59] 12
2.5 Configurações de controlo para o Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC), adaptado de [72] 14

3.1 Referencial ECI, LVLH e do corpo fixo 18
3.2 Representação exemplo dos ângulos de Euler, imagem do satélite de [88] . 21
3.3 Manobra de *rendezvous* e referenciais, adaptado de [84] 24
3.4 Exemplos de soluções óptimas globais e locais, adaptado de [91] 29
3.5 Ilustração do MPC, adaptado de [91] 33

4.1 Representação das restrições de desvio de obstáculos e de Linha de Visão (*Line Of Sight*) (LOS) 40
4.2 Resultados do 1º teste do MPC linear para o *rendezvous* de dois satélites . . 44
4.3 Resultados do 2º teste do MPC linear para o *rendezvous* de dois satélites . . 45
4.4 Resultados do 3º teste do MPC linear para o *rendezvous* de dois satélites . . 46

5.1 Pelotão de múltiplos satélites em órbita 49
5.2 Representação exemplo do passo convexo para dois agentes, adaptado de [69] 55
5.3 Resultados do 1º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 1 57
5.4 Resultados do 1º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 2 58
5.5 Resultados do 2º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 1 60
5.6 Resultados do 2º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 2 61

5.7 Resultados do 2º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 3 62

6.1 Exemplos de topologias para formação líder-seguidor num cenário de pelotão, adaptado de [78]. a) seguimento do antecessor com líder (SAL), b) bidirecional com líder (BDL), c) seguimento de dois antecessores com líder (SDAL) . . . 73
6.2 Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 1 76
6.3 Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 2 77
6.4 Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 3 78
6.5 Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 4 79

7.1 Representação de um grupo de satélites de serviço a operar num objeto central 83
7.2 Configuração dos propulsores do satélite seguidor, adaptado de [80] 85
7.3 Formação líder-seguidor com o satélite seguidor a apontar para um ponto em $\mathcal{F}^{lo}$, adaptado de [60] 87
7.4 Resultados da posição 3D dos diversos satélites de serviço à volta do objeto central 89
7.5 Resultados do MPC para o serviço de satélites em órbita, do satélite 1 . . . 91
7.6 Resultados do MPC para o serviço de satélites em órbita, do satélite 2 . . . 92

Índice de Tabelas

4.1 Parâmetros de simulação do MPC para o *rendezvous* de dois satélites 43
4.2 Desempenho da simulação do MPC para o *rendezvous* de dois satélites . . . 47

5.1 Parâmetros de simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, para a primeira situação de teste 56
5.2 Parâmetros de simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, para a segunda situação de teste 59
5.3 Desempenho da simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites 63

6.1 Parâmetros de simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites com topologia de rede 75
6.2 Desempenho da simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites com topologia de rede 80

7.1 Parâmetros de simulação do MPC não linear para serviço de satélites em órbita 90

Índice de Listagens

Siglas e Acrónimos

ATV	*Automated Transfer Vehicle*
BDL	Bidirecional com Líder
CWH	Clohessy-Wiltshire-Hill
DOF	Graus de Liberdade (*Degrees of Freedom*)
ECI	Inércia Centrado na Terra (*Earth-Centered Inertial*)
ESA	Agência Espacial Europeia (*European Space Agency*)
GPS	Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System*)
ISS	Estação Espacial Internacional (*International Space Station*)
LEO	Órbita Terrestre Baixa (*Low Earth Orbit*)
LOS	Linha de Visão (*Line Of Sight*)
LQR	Regulação Linear Quadrática (*Linear Quadratic Regulator*)
LQT	Seguimento Linear Quadrático (*Linear Quadratic Tracking*)
LVLH	Horizontal Local Vertical Local (*Local Vertical Local Horizontal*)
MPC	Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*)
MSR	*Mars Sample Return*
NASA	Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (*National Aeronautics and Space Administration*)
NLP	Programação Não Linear (*NonLinear Programming*)

OOSS Serviço de Satélite em Órbita (*On-Orbit Satellite Servicing*)
OSK Manter a Distância Orbital (*Orbital Station Keeping*)

PRISMA *Prototype Research Instruments and Space Mission technology Advancement*
PROBA *Project for On-Board Autonomy*

RMSE Raiz do Erro Quadrático Médio (*Root Mean Square Error*)

SAL Seguimento do Antecessor com Líder
SDAL Seguimento de Dois Antecessores com Líder
SLIT Sistema Linear Invariante no Tempo
SLVT Sistema Linear Variante no Tempo
SMC Controlo por Modo Deslizante (*Sliding Mode Controller*)

TH Tschauner-Hempel

VANT Veículo Aéreo Não Tripulado

ZOH Retentor de Ordem Zero (*Zero-Order Hold*)

Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números inteiros
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
$\mathbb{H}$	Conjunto dos quaterniões
$\mathbb{R}^i$	Conjunto de números reais vetoriais de dimensão i
$\mathbb{R}^{i\times j}$	Conjunto de números reais matriciais de dimensão $i \times j$
a, A, α, Γ	Variável escalar ou constante
$\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}$	Variável vetorial ou constante
$\mathbf{A}, \boldsymbol{\Gamma}$	Variável matricial ou constante
$\dot{a}$	Derivada no tempo da variável a
$\ddot{a}$	Segunda derivada no tempo da variável a
a^*	Variável óptima de a
$(.)^T$	Operação de transposição de uma matriz ou vetor
$(.)^{-1}$	Operação de inversão de uma matriz
$\|.\|$	Operação de valor absoluto para escalares
$c(.)$	Cosseno cos(.)
$s(.)$	Seno sin(.)
diag(.)	Matriz diagonal
det(.)	Determinante da matriz
arctan 2(.,.)	Arco tangente
arcsin(.)	Arco seno
$\otimes$	Operador de Kronecker para o produto de matrizes
$\mathbf{S}(.)$	Função da matriz antissimétrica
$\mathbf{I}_i$	Matriz identidade de dimensão $i \times i$
$\mathbf{0}_{i\times j}$	Matriz de zeros de dimensão $i \times j$
$\mathcal{F}$	Referencial

$\mathcal{F}^{sb}$	Referencial do corpo fixo do satélite s
$\mathcal{F}^{i}$	Referencial de inércia (ECI)
$\mathcal{F}^{so}$	Referencial orbital (LVLH) do satélite s
$\mathbf{O}$	Origem
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	Versores
$\oplus$	Terra
$\mathbf{r}$	Vetor posição de inércia
$\mathbf{h}$	Vetor de momento angular da órbita
$\mathcal{SO}(3)$	Grupo de rotação ortogonal 3×3
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação
$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$	Vetores coluna
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidade angular
$\mathbf{q}$	Quaternião
η	Componente escalar do quaternião
$\boldsymbol{\epsilon}$	Componente vetorial do quaternião
e_1, e_2, e_3	Elementos principais de rotação do quaternião
ϕ	Ângulo de rotação principal do quaternião
$\boldsymbol{\Theta}$	Ângulos de Euler
Φ	Roll
θ	Pitch
ψ	Yaw
X, Y, Z	Eixos do referencial
m	Massa do corpo
$\mathbf{p}$	Vetor de posição relativa entre dois corpos
r	Distância
μ	Parâmetro gravitacional padrão
$\mathbf{F}$	Vetor de forças
x, y, z	Componentes do vetor de posição relativo $\mathbf{p}$
n	Taxa orbital
$\mathbf{v}$	Velocidade
$\mathbf{x}$	Variável de estado
$\mathbf{y}$	Variável de saída
$\mathbf{u}$	Ação de controlo
$\mathbf{A}$	Matriz de estado
$\mathbf{B}$	Matriz de entrada
$\mathbf{C}$	Matriz de saída
$\mathbf{D}$	Matriz de avanço

t	Variável de tempo contínuo
k	Variável de tempo discreto
T_s	Tempo de amostragem
n_x	Número de estados
n_y	Número de saídas
n_u	Número de entradas
$\mathbf{J}$	Matriz de inércia
$\boldsymbol{\tau}$	Torque
$\boldsymbol{\Psi}$	Função objetiva
$\mathbf{d}$	Variáveis de decisão
$\mathbf{g}$	Função de restrição de desigualdade
$\mathbf{k}$	Função de restrição de igualdade
ε	Vizinhança de raio arbitrário
N	Horizonte de controlo
$\mathbf{V}$	Função de custo
$\mathbf{P}_r$	Matriz de penalização sobre o estado final
$\mathbf{Q}_r$	Matriz de penalização sobre os estados
$\mathbf{P}$	Matriz de penalização sobre o desvio final
$\mathbf{Q}$	Matriz de penalização sobre o desvio em relação à referência
$\mathbf{W}$	Matriz de penalização sobre a ação de controlo
$\mathbf{K}$	Matriz de ganho
$\mathcal{P}$	Matriz de Riccati
$\bar{\mathbf{y}}$	Referência
$\mathbf{U}$	Sequência de controlo
$\mathbf{X}$	Sequência de estado
$\mathbf{Y}$	Sequência de saída
$\bar{\mathbf{Y}}$	Sequência de referência
$\mathcal{A}$	Matriz **A** em formato de *batch*
$\mathcal{B}$	Matriz **B** em formato de *batch*
$\mathcal{Q}$	Matriz **Q** em formato de *batch*
$\mathcal{W}$	Matriz **W** em formato de *batch*
$\mathcal{X}$	Conjunto de restrições para as variáveis de estado
$\mathcal{U}$	Conjunto de restrições para as variáveis de controlo
$\mathbf{M}, \mathbf{w}$	Matrizes de restrições em formato de *batch*
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Matrizes de restrição de desigualdade
x_ρ, y_ρ, z_ρ	Dimensões do porto de acoplamento
c_x	Inclinação do cone tetraédrico da região LOS em x

c_z	Inclinação do cone tetraédrico da região LOS em z
n_k	Número de iterações da simulação
λ	Número de satélites num sistema
α	Peso da função de custo
γ	Valor inteiro da iteração
w	Peso do passo convexo
$\mathcal{G}$	Grafo
$\mathcal{N}$	Conjunto de vértices do grafo
$\mathcal{I}$	Conjunto de bordas do grafo
$\mathcal{E}$	Erro de seguimento de vizinhança
d	Grau
g	Variável de acesso ao líder
$\bar{\mathbf{L}}$	Matriz Laplaciana aumentada
$\mathbf{D}$	Matriz de grau
$\mathbf{G}$	Matriz de acesso ao líder
$\mathbf{A}_d$	Matriz de adjacência
$\boldsymbol{v}$	Vetor próprio
φ	Valor próprio
σ	Tolerância do algoritmo distribuído 1-hop
L_x, L_y, L_z	Dimensões do satélite
$\mathbf{f}$	Sistema não linear discreto no tempo
$\mathbf{Q}_p$	Matriz de penalização da posição
$\mathbf{Q}_v$	Matriz de penalização da velocidade
$\mathbf{Q}_\omega$	Matriz de penalização da velocidade angular
$\mathbf{Q}_q$	Matriz de penalização dos quaterniões
$\mathbf{t}$	Vetor numa posição orbital arbitrária

1

Introdução

Este Capítulo é responsável pela introdução da dissertação, ao apresentar a motivação, contexto, problema a resolver, objetivos e a estrutura da mesma, de maneira a ter uma melhor perspectiva do que se pretende alcançar e que impacto pode ter.

1.1 Motivação e Contexto

A exploração espacial tem sido muito debatida nos últimos anos, devido à curiosidade inerente de querer saber mais sobre o funcionamento do Universo e levar a Humanidade para fora do planeta Terra. Desde a chegada do homem à Lua, em 1969, que o ser humano tem realizado feitos tecnológicos impressionantes para expandir o conhecimento do nosso Universo, mas este continua a ser um mistério.

Já se fala da capacidade em realizar viagens espaciais no contexto de turismo e de aventura, ou mesmo de levar o ser humano a Marte para estabelecer cidades e ocupar o planeta, e mesmo que estas ideias pareçam ser inalcançáveis ou de um futuro distante, o ser humano vai dar o seu melhor, criando e desenvolvendo tecnologias que nos permitem ir cada vez mais longe. "*When something is important enough, you do it even if the odds are not in your favor*" (Elon Musk).

Dentro da imensa dificuldade que é planear e implementar um satélite para navegar no espaço, algumas das manobras mais importantes e difíceis de realizar são as manobras de *rendezvous* e de *docking*, que tornam possível acoplar fisicamente dois satélites ou apenas permitir a sua interação. Estas manobras são essenciais por exemplo para o transporte de mercadorias ou de pessoas de um satélite para o outro, para a sincronização de satélites, reabastecimento, montagem, manutenção e reparação de estruturas e também com aplicações para a recolha de lixo espacial, que ameaça a preservação dos satélites ativos a orbitar à volta da Terra. A ambição é de, não só conseguir realizar com sucesso todas estas tarefas mas também incorporar autonomia nestes sistemas, confiando o menos possível em ajuda humana externa, uma vez que a comunicação a longa distância causa atrasos na recepção do sinal, que torna o controlo manual indesejável para reagir adequadamente a certos problemas que possam surgir.

Nos últimos tempos tem ocorrido uma evolução tecnológica a um ritmo sem precedentes. No entanto, o setor da exploração espacial não parece estar a acompanhar as novas inovações e tendências tecnológicas ao mesmo nível, uma vez que no espaço há que ter em consideração fatores como o peso, volume, consumo energético e proteção contra radiação, o que limita severamente as capacidades computacionais dos processadores e do sistema. No entanto, nos últimos anos, já se tem vindo a considerar controladores mais sofisticados que permitem optimizar fatores importantes como o tempo de processamento, o consumo energético, a trajetória a tomar, etc. O Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC) é um desses controladores, acumulando vários artigos no setor Aeroespacial e para manobras de aproximação.

Esta dissertação pretende fundamentar e contribuir com novas metodologias e maneiras de ver o problema de *rendezvous* e de aproximação de satélites, aplicando novos métodos de optimização e de cooperação, através do MPC. Demonstrando ao mesmo tempo o potencial e a diversidade que o MPC pode ter nesta área.

1.2 Definição do Problema a Resolver e Solução Proposta

Nesta dissertação vão-se considerar dois problemas de controlo, nomeadamente o pelotão de múltiplos satélites e o serviço de satélites em órbita, que podem ser vistos como duas fases distintas de aproximação e interação espacial entre satélites. Tem-se como objetivo estudar estes dois problemas, que representam cenários onde técnicas de cooperação entre diversos satélites são mais adequadas a este tipo de aplicações, em vez da abordagem habitual que está limitada a uma configuração centralizada. Pretende-se ainda implementar estratégias de controlo adequadas para lidar com este tipo de situações, recorrendo ao MPC.

O primeiro cenário aborda o problema de sincronização num grupo de satélites para um sistema de pelotão, onde vários satélites seguidores convergem para a órbita do satélite líder e estabelecem uma posição relativa constante entre eles, através de duas soluções diferentes. Nesta proposta dá-se uso de diferentes topologias de rede e algoritmos para o MPC distribuído, onde o modelo do sistema é dado por uma dinâmica translacional relativa acoplada pela ação de controlo de cada satélite, o que permite interligar os diversos agentes. Um sistema de pelotão para satélites pode ter vários usos, como por exemplo sincronização, correção da posição orbital, retenção do satélite numa órbita específica e também para observação e seguimento de objetos.

O segundo cenário aborda o problema de serviços de satélites em órbita, onde um grupo de satélites ativos se movimentam à volta de um objeto central para atingir um objetivo específico, como por exemplo, observação, reparação, reabastecimento, etc. Considerando o objeto central como o centro do referencial comum aos restantes satélites seguidores é possível incorporar restrições acopladas para evitar colisões entre os satélites e o próprio objeto. Para além disso, uma vez que a observação pode ser uma aplicação muito importante para este tipo de problema, é incluída não só uma dinâmica relativa translacional, mas também uma dinâmica relativa rotacional, que permite ao satélite apontar para uma coordenada específica do objeto. Isto recorrendo a uma estratégia de MPC não linear cooperativa.

As contribuições desta dissertação incluem uma extensão do problema típico de sincronização e serviço de satélites em órbita, recorrendo não só a um controlador óptimo como o MPC, mas também incorporando o conceito de cooperação e distribuição entre cada satélite, o que resulta num sistema mais capaz e eficiente de uma maneira geral. Estes métodos são validados por meio de resultados de simulação, mostrando um desempenho fidedigno enquanto satisfazem todas as restrições impostas. E ainda, a partir do desenvolvimento efetuado para estes dois cenários, foi submetido e aceite um artigo científico para conferência.

1.3 Estrutura da Dissertação

A restante parte desta dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 2, Revisão Bibliográfica e História**, apresenta o contexto bibliográfico e uma breve história dos elementos chave da dissertação, com breves descrições da evolução e das etapas que foram desenvolvidas até agora, tanto a nível de investigação como de implementação em missões espaciais, com ênfase no uso de MPCs para efetuar a manobra de *rendezvous*, mas também abordando conceitos de formação de voo.
- **Capítulo 3, Fundamentos Teóricos**, apresenta o contexto teórico e define as metodologias e terminologias a considerar para os Capítulos subsequentes.
- **Capítulo 4, MPC Linear para Rendezvous de Dois Satélites**, apresenta um MPC linear para o *rendezvous* entre dois satélites, que serve de base para as propostas feitas nos Capítulos seguintes. É enunciada não só uma descrição do sistema, mas também são apresentados o problema de optimização, as restrições consideradas e os resultados obtidos em simulação.
- **Capítulo 5, MPC Distribuído para Pelotão de Múltiplos Satélites**, apresenta um sistema de pelotão para satélites, recorrendo a um algoritmo de controlo distribuído através do MPC. Para demonstrar a estratégia proposta é enunciada não só uma descrição do sistema, mas também são apresentados a dedução para a sua dinâmica relativa, o problema de optimização, as restrições consideradas e os resultados obtidos em simulação.
- **Capítulo 6, MPC Distribuído para Pelotão de Múltiplos Satélites com Topologia de Rede**, apresenta uma variação do MPC proposto no Capítulo 5, mas agora tendo em conta diferentes topologias de rede para a ligação dos satélites e recorrendo a um algoritmo distribuído e configuração do MPC diferentes. É considerada uma variedade de topologias relevantes para formações de líder-seguidor que são analisadas e comparadas entre si num ambiente de simulação.
- **Capítulo 7, MPC Não Linear para Serviço de Satélites em Órbita**, apresenta um sistema de serviços onde vários satélites seguidores vão interagir à volta de um objeto central, através do MPC. Neste Capítulo é enunciada não só uma descrição do sistema não linear, mas também o problema de optimização, as restrições consideradas e os resultados obtidos em simulação.
- **Capítulo 8, Conclusões e Trabalho Futuro**, resume o trabalho e estudo que foi efetuado nesta dissertação, os resultados que foram alcançados e ainda comentários, críticas e desenvolvimentos futuros que podem ser realizados para evoluir ainda mais o trabalho aqui apresentado.
- **Anexo I, Dedução das Equações de Clohessy-Wiltshire-Hill**, apresenta a dedução detalhada que permite chegar às equações lineares de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH).

2

Revisão Bibliográfica e História

Este Capítulo apresenta uma revisão de bibliografia existente, incluindo a história e evolução de alguns dos temas e áreas que servem de base para esta dissertação com descobertas, definições, desenvolvimentos e melhorias relevantes que foram surgindo ao longo do tempo.

Os temas a ser abordados vão incluir a manobra de *rendezvous*, mais concretamente a sua definição, as suas diferentes fases e processos, aplicações práticas e a sua história. De seguida é apresentado o conceito de Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC), como surgiu, o que é, qual a razão para ter sido escolhido como uma opção viável para manobras de aproximação e ainda uma revisão bibliográfica com os artigos e desenvolvimentos mais relevantes. E finalmente é introduzido o conceito de formação de voo para um grupo de satélites e ainda as configurações de controlo mais habituais, nomeadamente o centralizado, o descentralizado e o distribuído.

2.1 Rendezvous de Satélites

O *rendezvous* de dois satélites é a manobra, ou o conjunto de manobras orbitais que traz dois corpos para a mesma órbita e os aproxima um do outro, a uma distância de separação constante, próxima o suficiente para depois conseguir interligar ou interagir com os corpos. *Docking* é a manobra, efetuada após o *rendezvous*, que conecta fisicamente os dois corpos num só sistema, como acontece por exemplo entre um satélite e uma estação espacial [1]. Estas manobras são caraterizadas como sendo das mais importantes e difíceis de realizar numa missão espacial [2].

Para ambas as manobras considera-se habitualmente um veículo ativo, o *chaser*, que vai realizar a movimentação ou a mudança de órbita com o objetivo de chegar ao *target*, que pode ser uma estação espacial, um satélite, lixo espacial, etc. Esta é a metodologia mais comum, tendo sido aplicada em missões como a Gemini, Apollo, Soyuz ou a Mir [1].

Esta manobra apresenta habitualmente as seguintes fases [3], ilustradas também na Figura 2.1:

1. *Phasing* onde é estabelecida a comunicação com a estação terrestre para o *chaser* conseguir preparar o acoplamento com o *target*. Esta fase pretende ajustar os ângulos entre os dois satélites, reduzir a diferença no plano orbital e começar a navegação relativa entre os dois corpos. Nesta fase, o movimento dos satélites é tipicamente descrito através de um referencial de inércia [4];
2. *Homing* onde o *chaser* começa a agir através do seu sistema de controlo até chegar relativamente perto do *target*, com apenas alguns quilómetros de distância a separá-los. Assim, pode ser recolhida informação da órbita do *target* e reduzir a velocidade para preparar o acoplamento. Passa-se a recorrer a uma navegação relativa e tendo em consideração um referencial orbital centrado no *target*;
3. *Closing* onde o *chaser* se aproxima ainda mais do *target*, agora com uma diferença na ordem das centenas de metros e com os dois corpos alinhados para realizar o acoplamento em linha reta;
4. Aproximação final onde o *chaser* se aproxima o mais direito possível em direção ao *target*, respeitando e tendo em atenção todas as restrições existentes, tal como a sua posição, velocidade e atitude relativa, acabando esta fase no momento em que se efetua o primeiro contacto entre os dois corpos. Nesta fase recorre-se ao controlo dos seis Graus de Liberdade (*Degrees of Freedom*) (DOF) do *chaser*.

Como se pode constatar pela Figura 2.1 considera-se R-bar o vetor posição que vai do *target* para a Terra que representa a trajetória radial, V-bar o vetor que aponta na direção do vetor de velocidade orbital do *target* [3] e existe ainda o H-bar que completa o referencial e é representado pelo vetor do momento angular orbital [5].

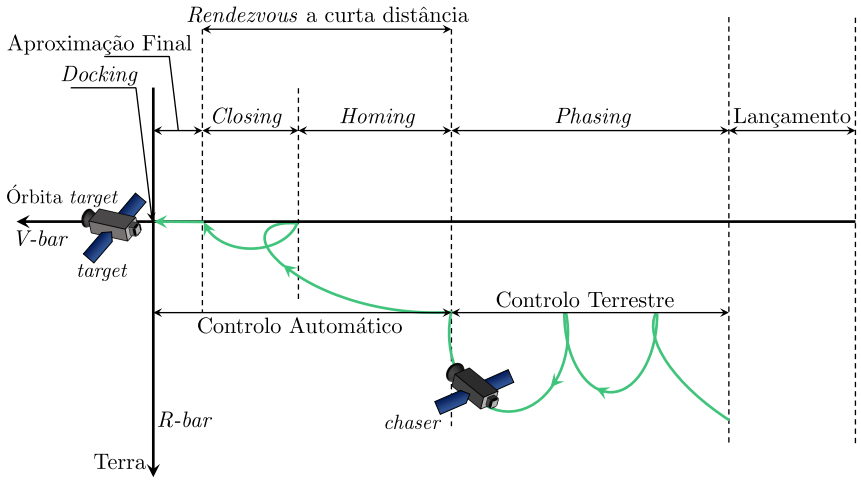


Figura 2.1: Fases de aproximação de um satélite para o outro, adaptado de [3]

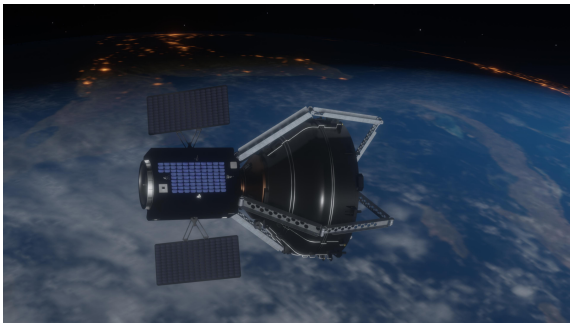
Dependendo do *target*, existem dois tipos principais de *rendezvous* [3, 6]:

- Cooperativo, onde nesta situação o *target* está controlado, operacional e com uma atitude não arbitrária, facilitando a manobra para realizar o *docking* e reduzindo a probabilidade de acidentes. Pode-se concluir que o *target* tem o eixo estabilizado e que existe a possibilidade de comunicação com o *chaser*;
- Não Cooperativo, onde nesta situação o *target* não consegue comunicar com o *chaser*, não pode ser controlado em um ou mais DOF e pode apresentar uma atitude arbitrária. Um exemplo desta manobra foi o uso do satélite STS-116 com um painel solar incontrolável da ISS [1]. Este tipo de *rendezvous* é normalmente mais complicado, uma vez que o *target* não consegue assistir nas operações de aproximação, como acontece por exemplo nas missões de recolha de detrito espacial.

Na Figura 2.2 a) é possível observar uma ilustração da missão Orbital Express da NASA usada para desenvolver e demonstrar tecnologias de manutenção através do *rendezvous* cooperativo [7, 8] e na Figura 2.2 b) uma ilustração da missão ClearSpace-1 da ESA que pretende realizar a recolha de lixo espacial [9] através do *rendezvous* não cooperativo, que é uma manobra cada vez mais importante, uma vez que esses detritos podem colidir com outros satélites em funcionamento. Alguns estudos e métodos foram efetuados para tentar solucionar o problema emergente dos detritos espaciais através da sua captura por manobras de *rendezvous* [10–12].

As aplicações do *rendezvous* incluem assim a recolha de detritos espaciais, o transporte de cargas, o reabastecimento espacial, a montagem, atualização ou reparação de estruturas em órbita [13] e ainda o movimento de satélites para novas localizações orbitais [6]. A componente automatizada desta manobra torna-se um fator crítico quando se está perante uma situação em que os atrasos de comunicação são substanciais, o que impede de reagir imediatamente a algum problema ou perturbação inesperada que possa ocorrer [14].

(a) Missão Orbital Express (NASA) [15]



(b) Missão ClearSpace-1 (ESA) [16]

Figura 2.2: Exemplos de missões espaciais com recurso ao *rendezvous*

O conceito de *rendezvous* começou a ser discutido desde a missão Gemini da NASA, que ocorreu de 1961 a 1966 e que tinha como objetivo o desenvolvimento de técnicas de viagem espacial para apoiar a missão Apollo que pretendia colocar o homem na Lua. Os astronautas americanos, Neil Armstrong e David Scott, foram os primeiros a realizar com sucesso a manobra de *docking*, dia 16 de Março de 1966, ao acoplar com o veículo Agena. Mas esta tratava-se de uma operação manual devido a preocupações de segurança, dando oportunidade aos russos para realizar a primeira manobra de *docking* automatizada, do satélite Cosmos-186 com o Cosmos-188, dia 30 de Outubro de 1967, usando apenas simples algoritmos de controlo e estratégias de navegação, devido à sua baixa capacidade computacional [1]. Após o sucesso russo com uso de manobras automatizadas, este começou a ser implementado em diversas missões espaciais como a missão americana Apollo (1968-1972), a missão americana Skylab (1973-1974), nos programas das estações espaciais russas Salyut e Mir (1971-1999), a missão americana e russa Apollo-Soyuz (1975) e o programa americano e russo para preparar a ISS (1990s) [17]. Mais tarde, naves espaciais como a ATV europeia, a Cygnus americana, a Dragon da SpaceX, a H-II japonesa e a Progress russa começaram a ser utilizadas como veículos de transporte, reabastecimento e montagem para a ISS [5, 17], como se pode observar na Figura 2.3. A história e a evolução das manobras de aproximação podem ser encontradas com mais detalhes em [18],

aprofundando as mudanças e dificuldades que foram encontradas durante as missões espaciais mais relevantes.

Figura 2.3: Acoplamento da Crew Dragon (SpaceX) à ISS [19]

Vários modelos de movimento relativo entre dois satélites são descritos na bibliografia, mas a mais simples e mais estudada no contexto de *rendezvous* é a abordagem apresentada em [20], denominada de equações de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH), que através do problema de dois corpos e das leis de Newton e Kepler deduz um sistema de equações linear e multi-variável para a posição e velocidade relativa entre um *target* e um *chaser*. Dado que se trata de uma linearização de uma dinâmica não linear, as equações de CWH dependem da situação específica a que se refere a manobra de *rendezvous* e assume-se assim uma distância relativa suficientemente próxima, excentricidade de órbita nula, ou seja, uma órbita circular e sem perturbações. Uma extensão das equações de CWH para órbitas keplerianas elípticas são as equações de Tschauner-Hempel (TH) que resultam num Sistema Linear Variante no Tempo (SLVT) [21] ou ainda as equações de Yamanaka e Ankersen [22] que apresentam uma solução analítica às equações de TH. Mas habitualmente, para o *rendezvous*, ter um modelo linear para realizar a aproximação dos satélites é suficiente.

Ao longo dos anos, diferentes métodos foram considerados para as operações de proximidade entre satélites, mas devido às limitações computacionais no espaço [23, 24], havia um foco em métodos mais simples e computacionalmente mais leves. No entanto, recentemente, com o desenvolvimento de sistemas embutidos mais capazes e métodos mais eficazes, passaram a ser considerados métodos mais exigentes em termos computacionais para realizar certas operações espaciais, e entre eles está o MPC.

2.2 Controlador Preditivo baseado em Modelos (MPC)

O controlador MPC começou no final dos anos 60 com o desenvolvimento da técnica de controlo preditivo por Jacques Richalet, progredindo com o controlo de horizonte estendido para modelos de espaço de estado nos anos 70, para o uso de processos industriais como refinarias de petróleo, processamento de químicos e centrais elétricas a partir dos anos 80 e mais tarde para a área automóvel, aeronáutica e solar [17, 25, 26] devido ao sucesso e às capacidades que este apresenta [27].

Antes do MPC ter sido considerado para manobras de proximidade, o Controlo por Modo Deslizante (*Sliding Mode Controller*) (SMC) era um dos eleitos [28–30], devido à sua capacidade em controlar sistemas não lineares, em obter convergência, por ser computacionalmente rápido e por possuir uma realimentação de estado multi-variável, que era apelativa para realizar o *docking* [31].

No entanto, este tipo de controlador tinha alguns problemas no que toca à incorporação de restrições de trajetórias, uma vez que dependia de análises probabilísticas, para além da incapacidade em resolver problemas de optimização no que toca a tempo ou combustível [17, 31, 32]. Isto fez com que o SMC fosse, em certas aplicações, substituído pelo MPC que consegue incorporar restrições e é baseado em conceitos de controlo óptimo. Estudos foram feitos para comparar as duas abordagens em [33], demonstrando o potencial do MPC no que toca a conseguir equilibrar melhor o consumo energético dos propulsores e a rapidez com que o erro estático convergia para atingir a posição desejada.

O MPC tinha outra vantagem que o tornava mais indicado do que outros controladores óptimos, que é a capacidade de re-optimizar a trajétoria inicialmente definida e de incorporar facilmente restrições, conseguindo preparar melhor o sistema para divergências no trajeto inicialmente definido e lidar com um maior grau de perturbações [17, 31]. Isto permite obter uma optimização *online*, com uma solução óptima em tempo real, que vai ter em atenção perturbações ou anomalias inesperadas e ajustar a lei de controlo óptimo a cada novo instante. Esta nova capacidade de optimização vem no entanto com desvantagens, nomeadamente a carga computacional comparativamente a métodos de controlo mais simples. Para além disso, ainda não existe uma abordagem definida para lidar com a precisão necessária face a todas as perturbações que podem surgir numa missão de *rendezvous*, abordagem esta que seja não só viável de implementar em tempo real mas que mantenha um bom desempenho operacional e, portanto, mais investigação e desenvolvimentos são necessários [34].

Este novo método de controlo começou por sua vez a ser tema de investigação na área de manobras de aproximação, com um leque extenso de artigos e com aplicações práticas reais como o PRISMA [35, 36] e também para cenários de missões espaciais como o MSR [37]. No entanto, devido às limitações a bordo dos processadores num ambiente espacial, o uso de optimização ainda se encontra na sua fase inicial.

Este limite computacional vem da necessidade de consumir o mínimo de energia possível, de ter um sistema embutido leve, ocupar o mínimo de espaço e de apresentar resistência a radiação [38]. Por outro lado, o uso de optimização para lançadores já é mais comum, uma vez que os lançadores podem ter menos restrições computacionais.

Dos artigos e desenvolvimentos alcançados com o uso do MPC na manobra de *rendezvous* destaca-se o tutorial [39] que apresenta e agrega as descobertas mais recentes e avanços relevantes nesta área, para além de enumerar estratégias para lidar com os limites computacionais. Uma componente importante do MPC é a sua capacidade de incorporar restrições e um estudo de caso é realizado em [40] com ênfase nas restrições a ter em consideração durante o processo de *rendezvous* como o desvio de obstáculos, restrições de largura de banda, de campo de visão, de segurança e restrições físicas. Algumas das restrições que são tipicamente consideradas na bibliografia incluem restrições nos propulsores [41–46] para limitar a energia despendida, restrições de Linha de Visão (*Line Of Sight*) (LOS) [41–43, 45, 46] para que o *chaser* consiga sempre observar o *target*, restrições de encaixe suave, ou do inglês *soft docking*, [13, 41, 42, 44, 47] para limitar a velocidade e posição terminal relativa e ainda restrições de desvio de obstáculos [42, 43, 46–48] para evitar o contacto com certos objetos. De destacar [41] que propõe uma técnica que varia a região de LOS consoante a rotação do *target* e as restrições dinamicamente reconfiguráveis para MPCs lineares que foram abordadas em [49], juntamente com o uso eficiente de combustível para este tipo de manobras em [50].

Um dos problemas que emerge com a manobra de *rendezvous* não cooperativa é o facto da atitude do *target* ser arbitrária, logo é preciso ter atenção ao seu momento angular. Este comportamento é definido como o *tumbling* de um satélite, do qual foram propostas diversas soluções com o auxílio do MPC [41, 43, 46, 51, 52]. A manobra de *docking* também apresenta uma importância significativa numa missão espacial, sendo possível considerar no mesmo controlador tanto a manobra de *rendezvous* como a de *docking* [31, 43, 44, 47, 51].

O uso de dinâmicas não lineares é estudado para manobras de aproximação com o MPC em [44, 46, 47, 53] e o mesmo se pode dizer para situações com órbitas elípticas [4, 46, 53], apesar de, em algumas situações, se poder considerar a órbita elíptica real como uma órbita circular de maneira a recorrer às equações lineares de CWH. Existem também abordagens que tentam responder ao problema de *rendezvous* numa maneira mais generalizada, ou seja, tendo em consideração os dois satélites como ativos. Em [54] considera-se uma órbita de referência oscilatória, apesar de recorrer a receptores de GPS nos satélites. Outra solução, apresentada em [55], é incluir duas dinâmicas interligadas, uma para o habitual referencial relativo entre o *target* e o *chaser* e outra dinâmica apenas para o *target* em relação à Terra, dependendo assim de um referencial de inércia.

2.3 Formação de Voo

A formação de voo de satélites é uma abordagem que inclui dois ou mais satélites numa configuração espacial controlada, cujas operações são sincronizadas através da constante troca de informação [56, 57]. Algumas aplicações deste tipo de sistemas incluem a exploração do espaço profundo, ou do inglês *deep space*, a monitorização da Terra e a manutenção de satélites [56]. Um exemplo de missão espacial que tem como objetivo demonstrar as tecnologias necessárias para realizar a formação de voo de múltiplos satélites é a missão PROBA-3 da ESA [58].

Esta abordagem traz algumas vantagens comparativamente ao método tradicional, especialmente a nível de custo, desempenho, risco, flexibilidade e modularidade, onde múltiplos satélites podem ser coordenados cooperativamente permitindo ter redundância efetiva e facilidade na substituição de cada agente [57]. Enquanto que a abordagem tradicional é mais centralizada e um problema com um único satélite pode significar a substituição completa do sistema.

No entanto, a formação de voo também traz desvantagens, nomeadamente na dificuldade de implementação e no rigor que é necessário para evitar as colisões entre os satélites que requerem um controlo preciso das distâncias, velocidades e orientações relativas. Em certas situações pode ainda haver complicações adicionais como interferências entre satélites e perturbações causadas por exemplo pelo arrasto atmosférico, solar e variações no campo gravitacional da Terra [57]. Na Figura 2.4 é possível observar alguns exemplos de topologias usadas para a formação de voo.

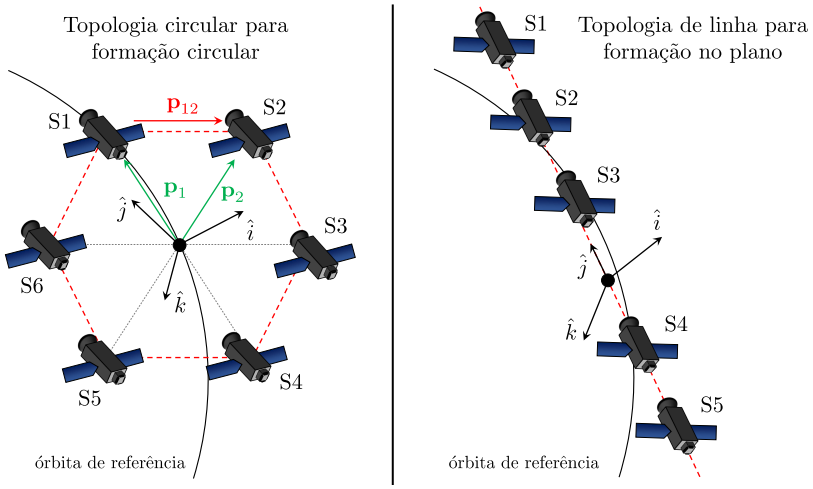


Figura 2.4: Exemplos de topologias para formação de voo de satélites, adaptado de [59]

Um sistema de formação de voo pode pedir em alguns casos uma solução mais completa da dinâmica relativa entre satélites como em [60] onde é deduzido um modelo matemático não linear com seis DOF, ou seja, inclui tanto a dinâmica translacional como a rotacional relativa entre dois satélites, numa formação líder-seguidor tendo em conta

perturbações orbitais. Este modelo é uma generalização das equações CWH, apresentando os mesmos princípios físicos.

Geralmente, existem três abordagens diferentes para a coordenação de vários veículos, nomeadamente a formação líder-seguidor, a abordagem comportamental e a abordagem de estrutura virtual.

Na formação líder-seguidor um dos agentes é considerado o líder que define um trajeto principal, e os restantes são os seguidores que acompanham esse líder. A vantagem é que o comportamento do grupo é dirigido pela especificação do comportamento de um único agente, o líder, mas ao mesmo tempo torna-se também um ponto único de falha crucial [61].

Na abordagem comportamental, vários comportamentos desejados são determinados para cada agente. A ideia é tornar a ação de controlo de cada agente numa média ponderada para cada comportamento existente como desvio de colisões, seguimento dos agentes e formação relativa constante. A vantagem é que é natural derivar estratégias de controlo [62, 63] e para além disso, cada agente reage de acordo com a posição dos seus vizinhos. A desvantagem é que o comportamento do grupo não pode ser definido explicitamente, para além de que é preciso analisar matematicamente a abordagem comportamental e garantir a estabilidade do grupo [61].

Finalmente, na abordagem de estrutura virtual, toda a formação é tratada como uma estrutura única. A estrutura virtual pode evoluir como um corpo rígido numa determinada direção e orientação, mantendo a relação geométrica rígida entre os vários veículos [64, 65]. A vantagem desta abordagem é que é bastante fácil de designar um comportamento coordenado ao grupo. A desvantagem é que exigir que a formação proceda como uma estrutura virtual limita o número de potenciais aplicações. Outra desvantagem é que o seu desenvolvimento está dependente de uma implementação de controlo centralizada [61].

Dependendo dos requisitos e necessidades para a formação de voo existem três configurações principais de controlo a que se pode recorrer, que se encontram ilustradas também na Figura 2.5.

A configuração centralizada é composta por um único controlador que trata de todas as tarefas necessárias, tais como conexões, controlo e monitorização [66]. Uma vez que o controlador vai tratar de todas as operações este precisa de ter uma capacidade computacional de alto nível, sendo assim o único ponto de controlo, mas também o único ponto de falha, que pode causar grandes problemas de segurança e financeiros em caso de anomalias, avarias ou falhas críticas [66–68], uma vez que não existe redundância. Para além disso, é preciso considerar que múltiplos utilizadores podem ter de partilhar os mesmos recursos, a expansão do sistema é limitada pela capacidade desse controlador e pode haver restrições do sistema para tecnologia não homogénea [66, 68]. O controlo centralizado resolve a grande optimização de todo o sistema, tendo assim toda a informação

dos modelos, custos e restrições sobre todas as variáveis de decisão [69].

A configuração descentralizada é o extremo oposto do centralizado no que toca à distribuição de tomada de decisões de um sistema. Este separa o sistema em agentes e optimiza apenas os objetivos locais, sem comunicação ou conexão entre os agentes [69], o que pode ser uma vantagem, mas ao mesmo tempo o desempenho resultante pode ter um impacto negativo para sistemas que dependem fortemente de interação. A vantagem desta abordagem é que, ao contrário do centralizado, se houver um defeito, apenas aquele agente afetado é substituído, mantendo o funcionamento geral do sistema. E permite também uma maior facilidade de expansão.

A configuração distribuída faz a separação em agentes mais simples como o descentralizado, mas permite ainda a comunicação e interação entre os diversos agentes do sistema. Assim tem a vantagem que as operações e tarefas são partilhadas e distribuídas, onde cada agente tem uma tarefa específica e comunica concorrentemente com os outros para chegar a um objetivo comum [67, 68], tendo em atenção como é que a sua ação afeta a ação dos outros [70]. Isto é possível através de uma rede de comunicação que coordena as ações de uma maneira concorrente. Ao ter presente elementos de redundância pode-se ter maior confiabilidade e segurança em casos de falhas, uma vez que o sistema geral pode continuar a funcionar mesmo que um dos agentes não esteja operacional [71]. Existe então mais flexibilidade e confiabilidade, melhor desempenho e maior capacidade para expandir o sistema [66]. Em contrapartida, as configurações distribuídas requerem geralmente mais investimento inicial e são mais difíceis de implementar.

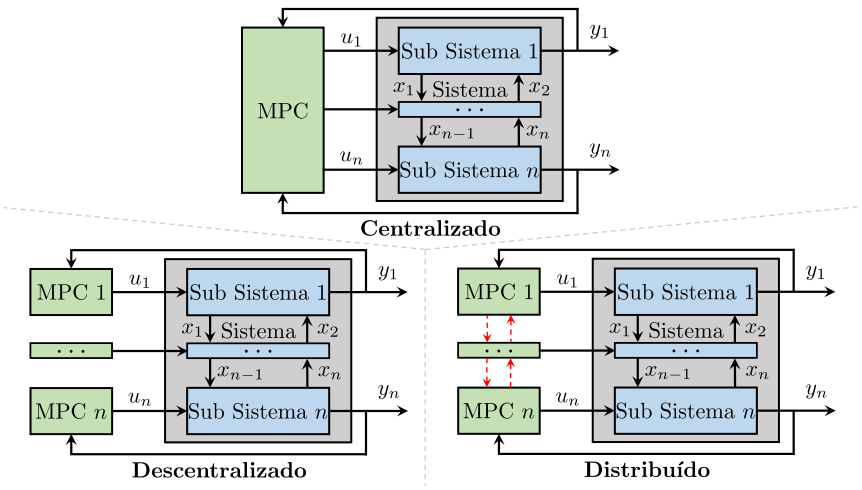


Figura 2.5: Configurações de controlo para o MPC, adaptado de [72]

No que toca a desenvolvimentos científicos para formação de voo e recorrendo ao MPC tem-se por exemplo a tese [73] que apresenta diferentes extensões das equações de movimento relativo para formação de voo e [74] onde é aprofundada a abordagem de estrutura virtual ao introduzir o conceito de realimentação de formação de maneira a garantir a estabilidade e permanência da formação que é sujeita a perturbações. Ainda,

através do SMC em [55] recorre-se às dinâmicas relativas não lineares para obter um controlador que optimiza a manobra e a continuação da formação de voo, tendo em consideração perturbações J_2 e também incertezas.

Para o problema específico do descentralizado, em [75] é combinada a configuração descentralizada com a abordagem de estrutura virtual tal que os benefícios de ambos são atingidos ao mesmo tempo, através de uma topologia de anel bidirecional. E ainda, em [76], são realizadas medições relativas que afetam todos os satélites seguidores, no sentido de desenvolver redundância e obter uma formação relativa mais precisa.

Na configuração distribuída de sistemas de controlo, em [77] são agregados os conceitos principais de cooperação, MPC, formação de voo, capacidade de recuperação de falha e atenção aos atrasos de comunicação, para além de comparar o seu desempenho às outras configurações, o centralizado e descentralizado, onde o distribuído superou em termos de minimizar o esforço de controlo e na compensação necessária para as falhas.

Relativamente ao MPC distribuído para um sistema composto por diversos agentes, em [78] é estudado o problema de pelotão para um grupo de veículos heterogéneos que seguem uma topologia de rede unidirecional com formação líder-seguidor. Existem também desenvolvimentos do MPC distribuído para o Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT), como em [79], onde se compara num ambiente de simulação o MPC distribuído com o centralizado para chegar a uma dada formação de voo, recorrendo a um modelo cinemático não linear e permitindo a troca de informação, como a sua posição, para evitar colisões entre os agentes.

3

Fundamentos Teóricos

Este Capítulo apresenta os fundamentos base e a teoria que estão por trás da realização desta dissertação, onde todas as definições, símbolos e metodologias principais irão ser descritas. Assume-se também que todas as grandezas apresentadas neste e nos restantes Capítulos.

O Capítulo começa por abordar os diversos referenciais que vão ser relevantes para descrever os corpos num dado espaço, progredindo com a cinemática de corpos rígidos e ainda os conceitos fundamentais da dinâmica translacional e rotacional relativa para satélites, que são habituais nas situações de *rendezvous* e de formação de voo. Finalmente é introduzido o conceito de optimização e alguns exemplos de problemas e controladores óptimos, como o problema de Regulação Linear Quadrática (*Linear Quadratic Regulator*) (LQR) e o de Seguimento Linear Quadrático (*Linear Quadratic Tracking*) (LQT), necessários à introdução do Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC), que é o foco da dissertação.

3.1 Referenciais

Nesta Secção serão apresentados sucintamente os referenciais mais relevantes para descrever os corpos num dado espaço, de maneira a conseguir determinar e controlar a cinemática e a dinâmica dos satélites. Para o desenvolvimento desta Secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente a [80–82]. Todos os referenciais descritos nesta Secção encontram-se representados na Figura 3.1.

Referencial do Corpo Fixo

Representado por $\mathcal{F}^{sb} : \{\mathbf{O}_s, \hat{\mathbf{i}}_{sb}, \hat{\mathbf{j}}_{sb}, \hat{\mathbf{k}}_{sb}\}$, é um referencial com origem no centro de massa do corpo $\mathbf{O}_s$ e com os eixos orientados em direção aos eixos principais de inércia, sendo portanto um referencial principal de inércia. O s refere-se ao satélite em específico, por exemplo $s = t$ para o *target*, $s = c$ para o *chaser*, $s = l$ para o líder ou $s = f$ para o seguidor.

Referencial de Inércia Centrado na Terra (ECI)

Representado por $\mathcal{F}^{i} : \{\mathbf{O}_{\oplus}, \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{j}}_i, \hat{\mathbf{k}}_i\}$, é um referencial de inércia, não rotativo, em relação às estrelas, com origem no centro de massa da Terra, podendo-se aplicar as Leis de Newton e facilitando os cálculos para obter as equações de movimento de um corpo orbital. O seu plano $\hat{\mathbf{i}}_i\hat{\mathbf{j}}_i$ vai coincidir com o plano equatorial da Terra, onde $\hat{\mathbf{k}}_i$ se encontra no eixo de rotação da Terra com sentido Sul-Norte, $\hat{\mathbf{i}}_i$ aponta para o equinócio vernal e $\hat{\mathbf{j}}_i$ respeita a regra da mão direita.

Referencial Horizontal Local Vertical Local (LVLH)

Representado por $\mathcal{F}^{so} : \{\mathbf{O}_s, \hat{\mathbf{i}}_{so}, \hat{\mathbf{j}}_{so}, \hat{\mathbf{k}}_{so}\}$, e também conhecido por ser um referencial orbital, é um referencial não inercial frequentemente utilizado para a navegação de satélites e observação [83]. Tem como origem o centro de massa do corpo em órbita, com $\hat{\mathbf{i}}_{so}$ direcionado ao longo do vector radial $\mathbf{r}_s \in \mathbb{R}^3$ expresso em $\mathcal{F}^{i}$, que vai do centro de massa da Terra até ao centro de massa do satélite. $\hat{\mathbf{k}}_{so}$ aponta para a direção normal à órbita, paralelo ao vetor do momento angular orbital e $\hat{\mathbf{j}}_{so}$ que segue a regra da mão direita. Assim, os versores de $\mathcal{F}^{so}$ podem ser definidos como

$$\hat{\mathbf{i}}_{so} = \frac{\mathbf{r}_s}{\|\mathbf{r}_s\|}, \quad \hat{\mathbf{j}}_{so} = \hat{\mathbf{k}}_{so} \times \hat{\mathbf{i}}_{so}, \quad \hat{\mathbf{k}}_{so} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{h} = \mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s$ é o vetor de momento angular da órbita.

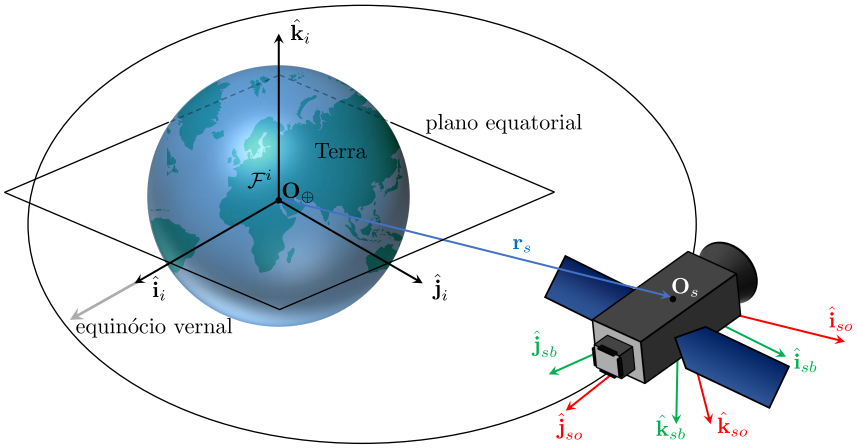


Figura 3.1: Referencial ECI, LVLH e do corpo fixo

3.2 Cinemática de Corpos Rígidos

Nesta Secção será apresentado o que é e como se pode descrever o movimento de um satélite, começando por introduzir conceitos básicos como a definição de um corpo rígido e progredindo ao apresentar as diferentes descrições de atitude e como converter de uma descrição para a outra, definindo a atitude como a orientação de um corpo em relação a um referencial. Para o desenvolvimento desta Secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente ao auxílio de [80, 81, 84, 85].

Um corpo rígido é um corpo contínuo sólido em que todos os seus pontos mantêm as distâncias relativas entre si, independentemente de forças externas aplicadas sobre este, não podendo haver deformações ou mudanças de forma. Este tipo de corpo vai possuir no máximo seis Graus de Liberdade (*Degrees of Freedom*) (DOF), três para a posição e três para a orientação [83]. Ora, ao considerar o satélite como um corpo rígido, é possível aplicar os princípios da cinemática e dinâmica de corpos rígidos, que é bem estudada.

A cinemática é caracterizada como a descrição do movimento de um corpo, desprezando a razão do seu movimento, ou seja, não tem em consideração forças, massas, inércia ou torque [84]. Para obter a cinemática pode-se recorrer a diferentes descrições de atitude, sendo as mais conhecidas as matrizes de rotação, os ângulos de Euler, os quaterniões e os parâmetros modificados de Rodrigues.

3.2.1 Matriz de Rotação

A matriz de rotação é uma descrição de atitude que serve principalmente para passar um vetor de um referencial para outro ou para descrever a orientação mútua entre duas coordenadas em referenciais diferentes [81]. Descrição que pertence ao conjunto de

matrizes $\mathcal{SO}(3)$ e que é representada por

$$\mathbf{R}_a^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

definindo $\mathbf{R}_a^b \in \mathbb{R}^{3\times3}$ como a matriz de rotação do referencial $\mathcal{F}^a$ para o referencial $\mathcal{F}^b$, ambos referenciais hipotéticos, e sendo $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ os seus vetores coluna.

O grupo $\mathcal{SO}(3)$ representa o conjunto de matrizes ortogonais tridimensionais com determinante um, ou seja,

$$\mathcal{SO}(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3} : \quad \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \quad \det(\mathbf{R}) = 1\} \tag{3.3}$$

sendo det(.) o determinante da matriz e $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a matriz identidade.

A utilidade das matrizes de rotação vem da facilidade com que se pode passar de um referencial para outro, inclusive para velocidades angulares. Definindo a velocidade angular como $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$, considere-se o exemplo

$$\boldsymbol{\omega}_{i,sb}^{sb} = \boldsymbol{\omega}_{so,sb}^{sb} + \mathbf{R}_{so}^{sb}\boldsymbol{\omega}_{i,so}^{so} \tag{3.4}$$

onde $\boldsymbol{\omega}_{i,sb}^{sb}$ é a velocidade angular do referencial $\mathcal{F}^{sb}$ relativamente a $\mathcal{F}^i$ expresso em $\mathcal{F}^{sb}$, $\boldsymbol{\omega}_{so,sb}^{sb}$ é a velocidade angular de $\mathcal{F}^{sb}$ relativamente a $\mathcal{F}^{so}$ expresso em $\mathcal{F}^{sb}$ e $\boldsymbol{\omega}_{i,so}^{so}$ é a velocidade angular do referencial $\mathcal{F}^{so}$ relativamente a $\mathcal{F}^i$ expresso em $\mathcal{F}^{so}$.

A derivada ao tempo da matriz $\mathbf{R}_a^b$ pode ser dada pela expressão [86]

$$\dot{\mathbf{R}}_a^b = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{b,a}^b)\mathbf{R}_a^b = \mathbf{R}_a^b\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{b,a}^a). \tag{3.5}$$

sendo $\mathbf{S}(.) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a matriz antissimétrica dada por

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

3.2.2 Quaterniões

O conceito de quaterniões, introduzido pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), é um sistema de coordenadas caracterizado por não apresentar singularidades e por possuir uma equação diferencial simples. Este, no entanto, tem a desvantagem de não ser trivial de visualizar, ao contrário de um ponto num espaço cartesiano.

Considera-se o quaternião como

$$\eta + \epsilon_1\hat{\mathbf{i}}_q + \epsilon_2\hat{\mathbf{j}}_q + \epsilon_3\hat{\mathbf{k}}_q = \eta + \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.7}$$

representado pela soma do coeficiente escalar η com o vetor $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ sendo $(\eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ os coeficientes do quaternião e $(\hat{\mathbf{i}}_q, \hat{\mathbf{j}}_q, \hat{\mathbf{k}}_q)$ as unidades fundamentais do quaternião.

Matricialmente, pode-se considerar o quaternião $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

sendo $\mathbb{H}$ o conjunto dos quaterniões.

As unidades fundamentais do quaternião $(\hat{\mathbf{i}}_q, \hat{\mathbf{j}}_q, \hat{\mathbf{k}}_q)$ são todas mutuamente perpendiculares entre si

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_q^2 = \hat{\mathbf{j}}_q^2 = \hat{\mathbf{k}}_q^2 = \hat{\mathbf{i}}_q \hat{\mathbf{j}}_q \hat{\mathbf{k}}_q = -1, \\ \hat{\mathbf{i}}_q \hat{\mathbf{j}}_q = -\hat{\mathbf{j}}_q \hat{\mathbf{i}}_q = \hat{\mathbf{k}}_q, \\ \hat{\mathbf{j}}_q \hat{\mathbf{k}}_q = -\hat{\mathbf{k}}_q \hat{\mathbf{j}}_q = \hat{\mathbf{i}}_q, \\ \hat{\mathbf{k}}_q \hat{\mathbf{i}}_q = -\hat{\mathbf{i}}_q \hat{\mathbf{k}}_q = \hat{\mathbf{j}}_q \end{cases} \tag{3.9}$$

e os coeficientes do quaternião são definidos com

$$\begin{cases} \eta = \cos(\phi/2), \\ \epsilon_1 = e_1 \sin(\phi/2), \\ \epsilon_2 = e_2 \sin(\phi/2), \\ \epsilon_3 = e_3 \sin(\phi/2) \end{cases} \tag{3.10}$$

sendo (e_1, e_2, e_3) os elementos principais de rotação e ϕ o ângulo de rotação principal, tal que

$$\begin{cases} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \\ \eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = 1 \end{cases} . \tag{3.11}$$

Existe ainda o conjugado do quaternião que é dado por $\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \eta & -\boldsymbol{\epsilon}^T \end{bmatrix}^T$.

Para determinar a evolução dos quaterniões é preciso obter a sua equação diferencial, descrita na forma matricial como

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ou também por [87]

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\epsilon}^T \\ \eta \mathbf{I}_3 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}. \tag{3.13}$$

A conversão de quaterniões para matriz de rotação é dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \eta^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \eta\epsilon_3) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \eta\epsilon_2) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \eta\epsilon_3) & \eta^2 - \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \eta\epsilon_1) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \eta\epsilon_2) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \eta\epsilon_1) & \eta^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

3.2.3 Ângulos de Euler

Outra descrição muito utilizada são os ângulos de Euler $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R}^3$ representados na Figura 3.2. São caracterizados por dependerem de uma sequência de rotações, ou seja, os ângulos de Euler podem apontar para diferentes pontos no espaço de acordo com a sua sequência de rotação, para além de apresentarem singularidades e uma equação diferencial menos simples que a dos quaterniões. Por outro lado, os ângulos de Euler são mais fáceis de conseguir visualizar.

Dada estas características, normalmente utilizam-se os quaterniões para lidar com a cinemática, e depois esses quaterniões são convertidos para ângulos de Euler de maneira a conseguir visualizar facilmente a evolução da atitude do corpo. Enquanto que as matrizes de rotação ficam encarregues de mudar de um referencial para outro, caso seja necessário.

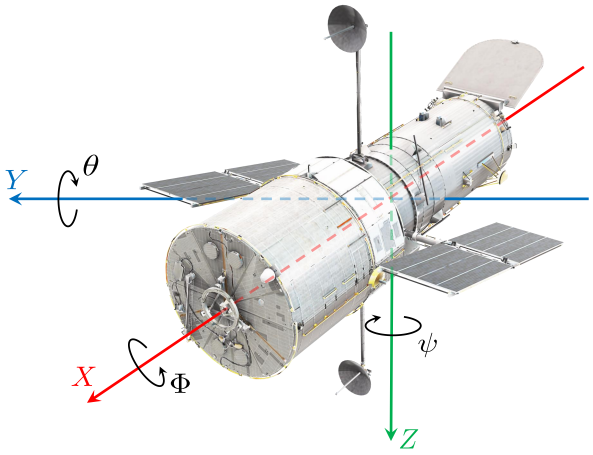


Figura 3.2: Representação exemplo dos ângulos de Euler, imagem do satélite de [88]

Os ângulos de Euler são por sua vez definidos por

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

sendo Φ o *roll*, θ o *pitch* e ψ o *yaw*, que neste caso representam respetivamente rotações nos eixos X, Y e Z de um referencial para outro. E através dos ângulos de Euler pode-se definir as matrizes de rotação para os diferentes eixos, dados por

$$\mathbf{R}_X(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) \\ 0 & \sin(\Phi) & \cos(\Phi) \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\mathbf{R}_Z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Considerando uma matriz de rotação $\mathbf{R}_{Z_\psi Y_\theta X_\Phi}$ descrita por uma rotação ψ no eixo Z, seguido de uma rotação θ no eixo Y e finalmente uma rotação Φ no eixo X, ou seja, uma sequência $Z_\psi Y_\theta X_\Phi$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{Z_\psi Y_\theta X_\Phi} =& \mathbf{R}_Z(\psi)\mathbf{R}_Y(\theta)\mathbf{R}_X(\Phi) = \\ & \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & -s(\psi)c(\Phi) + c(\psi)s(\theta)s(\Phi) & s(\psi)s(\Phi) + c(\psi)c(\Phi)s(\theta) \\ s(\psi)c(\theta) & c(\psi)c(\Phi) + s(\psi)s(\theta)s(\Phi) & -c(\psi)s(\Phi) + s(\psi)c(\Phi)s(\theta) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\Phi) & c(\theta)c(\Phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.19}$$

abreviando cos(.) para $c(.)$ e sin(.) para $s(.)$.

Por outro lado, a conversão de ângulos de Euler para quaterniões é dada por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} c(\Phi/2)c(\theta/2)c(\psi/2) + s(\Phi/2)s(\theta/2)s(\psi/2) \\ s(\Phi/2)c(\theta/2)c(\psi/2) - c(\Phi/2)s(\theta/2)s(\psi/2) \\ c(\Phi/2)s(\theta/2)c(\psi/2) + s(\Phi/2)c(\theta/2)s(\psi/2) \\ c(\Phi/2)c(\theta/2)s(\psi/2) - s(\Phi/2)s(\theta/2)c(\psi/2) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

3.3 Dinâmica Translacional Relativa

Nesta Secção são apresentadas as equações matemáticas que permitem obter a dinâmica translacional relativa para a manobra de *rendezvous* entre dois satélites, considerando uma órbita circular. Começa-se por deduzir a dinâmica relativa não linear, que depois é linearizada para chegar às equações de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH) [20] e finalmente é executada a sua discretização. Para o desenvolvimento desta Secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente ao auxílio de [31, 34, 51].

Tipicamente, manobras de aproximação como o *rendezvous* são realizadas de forma relativa, ou seja, a partir de um referencial orbital relativo centrado no *target*, em vez de considerar os estados absolutos dos dois satélites. Ao considerar um referencial relativo não só se reduz a quantidade de estados, mas também se tem tipicamente, usando sensores locais, toda a informação necessária à manobra, sem ter de recorrer a comunicação terrestre, daí ser a abordagem típica para este tipo de problemas. Considera-se que as manobras a serem efetuadas são entre dois satélites suficientemente próximos um do outro, ambos a orbitar a Terra e desprezando perturbações como a pressão da radiação solar, arrasto atmosférico, a força gravitacional de um terceiro corpo, a força de atração gravítica mútua entre os satélites, etc. [13]

Considere-se ainda um sistema composto por dois satélites, um satélite passivo *target* com massa m_t numa órbita circular e um satélite ativo *chaser* com massa m_c. Seja $\mathbf{r}_t \in \mathbb{R}^3$ a posição do *target* e $\mathbf{r}_c \in \mathbb{R}^3$ a posição do *chaser*, ambos expressos no referencial $\mathcal{F}^i$, pode-se dizer que a posição do *chaser* relativamente ao *target* é dada por

$$^i\mathbf{p} = \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_t. \tag{3.21}$$

Aplicando a segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal para um corpo s, obtém-se a aceleração

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = -\frac{\mu}{r_s^3}\mathbf{r}_s \tag{3.22}$$

sendo $\mathbf{r}_s$ o vetor de posição do satélite expresso em $\mathcal{F}^i$, r_s a sua magnitude e μ o parâmetro gravitacional padrão. Neste caso, uma vez que a massa dos satélites é muito pequena quando comparada à massa da Terra, μ pode ser considerado o parâmetro gravitacional padrão da Terra.

Ora, a aceleração dos satélites *target* e *chaser*, a partir da expressão (3.22), vão ser dadas respetivamente por

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t, \tag{3.23}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \frac{\mathbf{F}_c}{m_c} \tag{3.24}$$

onde $\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de forças externas aplicadas no *chaser*, expressas em $\mathcal{F}^i$, que neste caso representam forças propulsivas.

Substituindo as expressões (3.23) e (3.24) na segunda derivada em relação ao tempo da expressão (3.21), obtém-se a equação de aceleração relativa entre os dois satélites

$$ {}^{i}\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{r}}_c - \ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t + \frac{\mathbf{F}_c}{m_c}. \tag{3.25} $$

Considere-se ainda um referencial orbital $\mathcal{F}^{to}$ centrado no satélite *target*, para uma órbita circular à volta da Terra, como se pode observar na Figura 3.3, e que descreva a posição relativa entre o *chaser* e *target* como

$$ \mathbf{p} = \mathbf{R}_i^{to}\left({}^{i}\mathbf{p}\right) = x\hat{\mathbf{i}}_{to} + y\hat{\mathbf{j}}_{to} + z\hat{\mathbf{k}}_{to}. \tag{3.26} $$

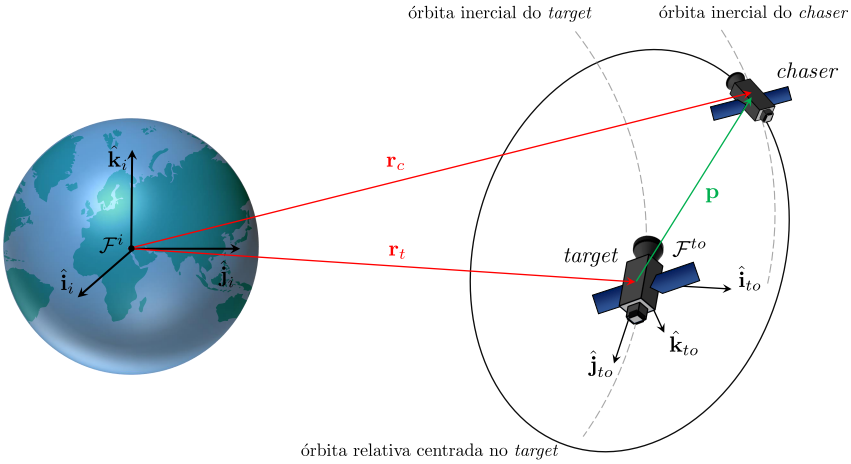


Figura 3.3: Manobra de *rendezvous* e referenciais, adaptado de [84]

Assim, a partir das expressões (3.1), (3.25) e (3.26) é possível chegar ao conjunto de equações não lineares para a dinâmica translacional relativa, dada por

$$ \begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2(r_t + x) + \mu\frac{r_t + x}{\left[(x+r_t)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} = u_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y + \mu\frac{y}{\left[(x+r_t)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} = u_y, \\ \ddot{z} + \mu\frac{z}{\left[(x+r_t)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} = u_y \end{cases} \tag{3.27} $$

sendo $n = \sqrt{\frac{\mu}{r_t^3}}$ a taxa orbital do *target* e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T = \frac{\mathbf{F}_c}{m_c} \in \mathbb{R}^3$ a ação de controlo.

No entanto, a expressão (3.27) pode ser reescrita no formato matricial, ficando

$$ \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{C}_t\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{D}_t\mathbf{p} + \mathbf{E}_t + \mathbf{F}_t \tag{3.28} $$

onde

$$ \mathbf{C}_t = -2n\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.29} $$

$$\mathbf{D}_t = -\begin{bmatrix} \frac{\mu}{r_c^3} - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{r_c^3} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{r_c^3} \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

$$\mathbf{E}_t = -\mu \begin{bmatrix} \frac{r_t}{r_c^3} - \frac{1}{r_t^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

e

$$\mathbf{F}_t = \frac{\mathbf{F}_c}{m_c}. \tag{3.32}$$

A expressão (3.27) pode também ser linearizada em torno do ponto de origem do referencial $\mathcal{F}^{to}$, obtendo o sistema de equações diferenciais CWH

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3n^2 x - 2n\dot{y} = u_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = u_y, \\ \ddot{z} + n^2 z = u_z \end{cases} \tag{3.33}$$

onde, no Anexo I, é documentado e deduzido com mais detalhe todo o processo matemático que permite chegar a este resultado.

As equações de CWH podem ser usadas como uma boa aproximação ao fornecer um conjunto linearizado de equações de movimento. Mas sendo uma aproximação, esta apresenta erros no comportamento real dos satélites. Dependendo dos requisitos de precisão individuais, as equações de CWH só devem ser aplicadas para uma separação de satélites até à ordem das dezenas de quilómetros e para órbitas quase circulares com excentricidades de ordem $\leq 10^{-3}$.

A expressão (3.33) pode ser reescrita no formato de espaço de estado para um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT) dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3.34}$$

ficando

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de estado e t é a variável de tempo contínuo.

Passando para o tempo discreto, o espaço de estado é definido como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k) \tag{3.36}$$

de tal modo que, aplicando o método de discretização Retentor de Ordem Zero (*Zero-Order Hold*) (ZOH) [89] para um tempo de amostragem T_s apropriado, obtém-se

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_s} = \begin{bmatrix} 4-3\cos(nT_s) & 0 & 0 & \frac{1}{n}\sin(nT_s) & \frac{2}{n}(1-\cos(nT_s)) & 0 \\ 6(\sin(nT_s)-nT_s) & 1 & 0 & \frac{2}{n}(\cos(nT_s)-1) & \frac{1}{n}(4\sin(nT_s)-3nT_s) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(nT_s) & 0 & 0 & \frac{1}{n}\sin(nT_s) \\ 3n\sin(nT_s) & 0 & 0 & \cos(nT_s) & 2\sin(nT_s) & 0 \\ 6n(\cos(nT_s)-1) & 0 & 0 & -2\sin(nT_s) & 4\cos(nT_s)-3 & 0 \\ 0 & 0 & -n\sin(nT_s) & 0 & 0 & \cos(nT_s) \end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{B}\int_{t=0}^{T_s} e^{\mathbf{A}t}dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2}(1-\cos(nT_s)) & \frac{2}{n}(T_s-\frac{1}{n}\sin(nT_s)) & 0 \\ \frac{2}{n^2}(\sin(nT_s)-nT_s) & -\frac{3}{2}T_s^2+\frac{4}{n^2}(1-\cos(nT_s)) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n^2}(1-\cos(nT_s)) \\ \frac{1}{n}\sin(nT_s) & \frac{2}{n}(1-\cos(nT_s)) & 0 \\ \frac{2}{n}(\cos(nT_s)-1) & -3T_s+\frac{4}{n}\sin(nT_s) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n}\sin(nT_s) \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

sendo k a variável de tempo discreto. Discretização que é recomendada na literatura para a situação de *rendezvous* [39].

3.4 Dinâmica Rotacional Relativa

Nesta Secção introduz-se a dinâmica rotacional relativa entre dois satélites no espaço, a orbitar a Terra. Para o desenvolvimento desta Secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente ao auxílio de [60].

Para obter a dinâmica recorre-se aos quaterniões como representação de atitude, e às matrizes de rotação para a transformação de um referencial para outro. Considera-se ainda uma formação líder-seguidor sem perturbações e alguns dos conceitos já apresentados na Secção 3.2.

Considere-se o quaternião unitário $\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} \eta_s & \boldsymbol{\epsilon}_s^T \end{bmatrix}^T$, com $\|\mathbf{q}_s\| = 1$, como a representação de atitude do satélite do referencial $\mathcal{F}^{sb}$ sempre em relação ao referencial orbital do líder $\mathcal{F}^{lo}$, $\mathbf{q}_f$ para o satélite seguidor e $\mathbf{q}_l$ para o satélite líder.

Então, o quaternião relativo entre os referenciais fixos no corpo dos dois satélites pode ser dado por

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_f \otimes \bar{\mathbf{q}}_l = \begin{bmatrix} \eta_f \eta_l + \boldsymbol{\epsilon}_f^T \boldsymbol{\epsilon}_l \\ \eta_l \boldsymbol{\epsilon}_f - \eta_f \boldsymbol{\epsilon}_l - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_f)\boldsymbol{\epsilon}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

e a cinemática relativa de atitude por

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\epsilon}^T \\ \eta \mathbf{I}_3 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} \tag{3.40}$$

sendo $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{lb,fb}^{fb}$ a velocidade angular relativa, ou a velocidade angular de $\mathcal{F}^{fb}$ relativamente a $\mathcal{F}^{lb}$, expresso em $\mathcal{F}^{fb}$.

Considerando os satélites como corpos rígidos, a dinâmica rotacional pode ser expressa pelas equações de movimento de Euler para corpos rígidos, dado por

$$\mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,sb}^{sb} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i,sb}^{sb})\mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega}_{i,sb}^{sb} + \boldsymbol{\tau}_{sb} \tag{3.41}$$

onde $\mathbf{J}_s \in \mathbb{R}^{3\times3}$ é a matriz de inércia do satélite e $\boldsymbol{\tau}_{sb} \in \mathbb{R}^3$ é o torque de atuação do satélite expresso em $\mathcal{F}^{sb}$.

Assim, considerando que a velocidade angular relativa é dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i,fb}^{fb} - \mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb} = \boldsymbol{\omega}_{lb,fb}^{fb} \tag{3.42}$$

a dinâmica de atitude relativa fica

$$\mathbf{J}_f \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}_f \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,fb}^{fb} - \mathbf{J}_f \dot{\mathbf{R}}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb} - \mathbf{J}_f \mathbf{R}_{lb}^{fb} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,lb}^{lb} \tag{3.43}$$

e juntando a expressão (3.41) obtém-se

$$\mathbf{J}_f \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}_f \mathbf{S}(\mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}_f \mathbf{R}_{lb}^{fb} \mathbf{J}_l^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) \mathbf{J}_l \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) \mathbf{J}_f (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) = \mathbf{F}_r \tag{3.44}$$

que pode ser reescrito na expressão [60]

$$\mathbf{J}_f \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{C}_r \boldsymbol{\omega} + \mathbf{E}_r + \mathbf{F}_r \tag{3.45}$$

onde

$$\mathbf{C}_r = -\mathbf{J}_f \mathbf{S}(\mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) - \mathbf{S}(\mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) \mathbf{J}_f + \mathbf{S}(\mathbf{J}_f (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb})) \tag{3.46}$$

é uma matriz anti-simétrica,

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{S}(\mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) \mathbf{J}_f \mathbf{R}_{lb}^{fb} \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb} + \mathbf{J}_f \mathbf{R}_{lb}^{fb} \mathbf{J}_l^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}) \mathbf{J}_l \boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb}, \tag{3.47}$$

e

$$\mathbf{F}_r = \boldsymbol{\tau}_{fb} - \mathbf{J}_f \mathbf{R}_{lb}^{fb} \mathbf{J}_l^{-1} \boldsymbol{\tau}_{lb} \tag{3.48}$$

é o torque de atuação relativa e $\mathbf{R}_{lb}^{fb}$ é a matriz de rotação do referencial $\mathcal{F}^{lb}$ para $\mathcal{F}^{fb}$ que pode ser obtida através do quaternião relativo $\mathbf{q}$ pela expressão

$$\mathbf{R}_{lb}^{fb} = \mathbf{I}_3 + 2\eta \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mathbf{S}^2(\boldsymbol{\epsilon}). \tag{3.49}$$

3.5 Controlo Óptimo

Nesta Secção introduzem-se os princípios básicos de optimização matemática, seguido de alguns exemplos de problemas de controlo óptimo, como o LQR e o LQT. Estes são métodos que permitem resolver um problema de optimização ao minimizar a função de custo e ao encontrar a melhor solução possível a um problema em que a sua qualidade possa ser quantificada [90]. Para o desenvolvimento desta Secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente ao auxílio de [90–92].

Pode-se generalizar matematicamente o problema de optimização pela expressão (3.50), considerando que se está a tratar de um problema de minimização.

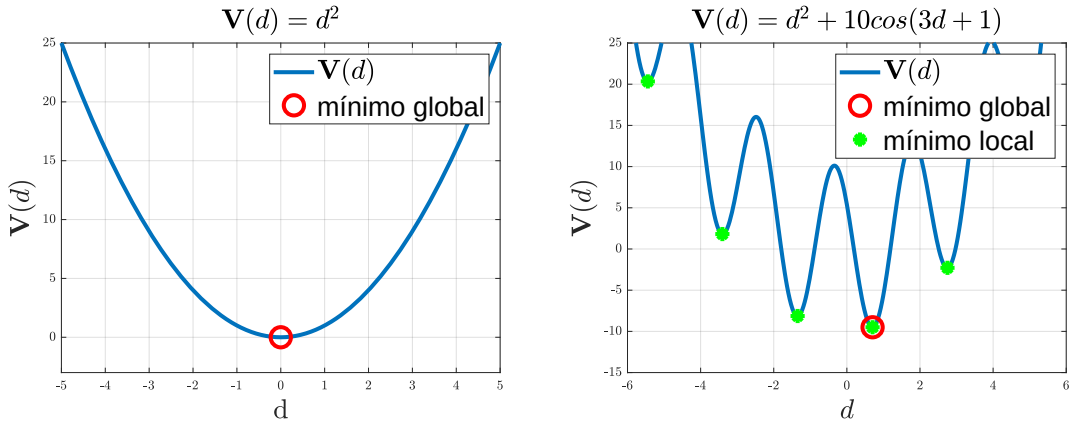
$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \mathbf{V}(\mathbf{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{d}) \leq 0, \\ & \mathbf{k}(\mathbf{d}) = 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

sendo $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_w}$ as variáveis de decisão, $\mathbf{V} : \mathbb{R}^{n_w} \to \mathbb{R}$ a função objectiva que descreve o problema de optimização e do qual se quer determinar o seu mínimo, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_w} \to \mathbb{R}^{n_g}$ as funções de restrição de desigualdade e $\mathbf{k} : \mathbb{R}^{n_w} \to \mathbb{R}^{n_k}$ as funções de restrição de igualdade.

Dependendo do tipo de problema e dos métodos de optimização, a solução pode ser:

- Óptima Local: em que $\mathbf{d}^*$ é um mínimo local que satisfaz as restrições e não é pior que os seus vizinhos, ou seja, existe uma vizinhança $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{V}(\mathbf{d}^*) \leq \mathbf{V}(\mathbf{d})$ para todo o $\mathbf{d}$ pertencente ao conjunto definido pelas restrições, tal que $\|\mathbf{d} - \mathbf{d}^*\| < \varepsilon$.
- Óptima Global: em que $\mathbf{d}^*$ é um mínimo global que satisfaz as restrições e não é pior que todos os outros, ou seja, $\mathbf{V}(\mathbf{d}^*) \leq \mathbf{V}(\mathbf{d})$ para todo o $\mathbf{d}$ pertencente ao conjunto definido pelas restrições.

Na Figura 3.4 é possível observar alguns exemplos do tipo de soluções mencionadas.



(a) Solução óptima global

(b) Solução óptima local

Figura 3.4: Exemplos de soluções óptimas globais e locais, adaptado de [91]

Considere-se ainda um SLIT discreto dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.51}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{3.52}$$

equivalente a

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \tag{3.53}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \tag{3.54}$$

onde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ é a variável de estado, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a variável de controlo, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a variável de saída, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz de estado, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ é a matriz de entrada, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ é a matriz de saída, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ é a matriz de avanço que é nula e por isso desprezada e $\mathbf{x}_0$ é a condição inicial.

3.5.1 Problema de Regulação Linear Quadrática (LQR)

Definition 3.1 (Problema de Regulação Linear Quadrática (LQR))**.** *Encontrar a sequência de controlo óptima $\boldsymbol{u}_k^*$ para $k \in \{0;\ldots;N-1\}$ que leva o sistema ao longo da trajectória de estado $\boldsymbol{x}_k^*$ para $k \in \{0;\ldots;N\}$ de acordo com a dinâmica do sistema linear, tal que o critério de desempenho especificado $\boldsymbol{V}_0$ seja minimizado.*

Isto é

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u}_0,\ldots,\boldsymbol{u}_{N-1}} \quad & \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{x}_N^T \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{Q}_r \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{u}_k) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k \end{aligned} \tag{3.55}$$

sendo $\boldsymbol{P}_r \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ a penalização sobre o estado final, $\boldsymbol{Q}_r \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ a penalização sobre os estados, $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ a penalização sobre a ação de controlo e N o horizonte de controlo.

Reformulando o problema de optimização através dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se a lei de controlo óptima

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k \tag{3.56}$$

e o sistema em anel fechado

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k)\mathbf{x}_k \tag{3.57}$$

tal que, o ganho é dado por

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{B}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{W})^{-1} \mathbf{B}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathbf{A} \tag{3.58}$$

e a matriz de Riccati por

$$\mathcal{P}_k = \mathbf{A}^T \mathcal{P}_{k+1} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k) + \mathbf{Q}_r. \tag{3.59}$$

Mas outra maneira de descrever um SLIT discreto é através da formulação *batch*

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) \tag{3.60}$$

e ao juntar as equações de estado até ao instante N obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(1) \\ \mathbf{x}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^N \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tag{3.61}$$

$$\mathbf{X} = \mathcal{A}\mathbf{x}(0) + \mathcal{B}\mathbf{U}.$$

Assim, o problema de controlo óptimo passa a ser

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(0)^T \tilde{\mathbf{Q}}_r \mathbf{x}(0) \tag{3.62}$$

com a sequência de controlo óptima dada por

$$\mathbf{U}^* = -\mathbf{K}\mathbf{x}(0) \tag{3.63}$$

e a sequência de estado óptima por

$$\mathbf{X}^* = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(0), \tag{3.64}$$

considerando

- $\mathcal{Q}_r = \text{diag}(\mathbf{Q}_r, \mathbf{Q}_r, \cdots, \mathbf{Q}_r, \mathbf{P}_r) \in \mathbb{R}^{n_x(N+1) \times n_x(N+1)}$;
- $\mathcal{W} = \text{diag}(\mathbf{W}, \mathbf{W}, \cdots, \mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{n_u N \times n_u N}$;
- $\tilde{\mathbf{Q}}_r = \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_r \mathcal{A}$;
- $\tilde{\mathbf{W}} = \mathcal{B}^T \mathcal{Q}_r \mathcal{B} + \mathcal{W}$;
- $\tilde{\mathbf{T}} = \mathcal{B}^T \mathcal{Q}_r \mathcal{A}$;
- $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{T}}$.

3.5.2 Problema de Seguimento Linear Quadrático (LQT)

Definition 3.2 (Problema de Seguimento Linear Quadrático (LQT))**.** *Encontrar a sequência de controlo óptima $\boldsymbol{u}_k^*$ para $k \in \{0; \ldots; N-1\}$ que leva o sistema ao longo da trajectória de estado $\boldsymbol{x}_k^*$ para $k \in \{0; \ldots; N\}$ de acordo com a dinâmica do sistema linear, tal que o critério de desempenho especificado $\boldsymbol{V}_0$ seja minimizado relativamente a uma referência $\bar{\boldsymbol{y}}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$.*

Isto é

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}} \quad & \boldsymbol{V}_0 = (\boldsymbol{y}_N - \bar{\boldsymbol{y}}_N)^T \boldsymbol{P} (\boldsymbol{y}_N - \bar{\boldsymbol{y}}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (\boldsymbol{y}_k - \bar{\boldsymbol{y}}_k)^T \boldsymbol{Q} (\boldsymbol{y}_k - \bar{\boldsymbol{y}}_k) + \boldsymbol{u}_k^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{u}_k \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k, \\ & \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k \end{aligned} \tag{3.65}$$

sendo $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ a penalização sobre o desvio final e $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ a penalização sobre o desvio em relação à referência.

A formulação *batch* do SLIT discreto, tendo em conta a equação de saída é definida por

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-i}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) \tag{3.66}$$

e ao juntar as equações de saída até ao instante N obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^N \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathcal{B}}\mathbf{U}. \tag{3.67}$$

Assim, o problema de controlo óptimo passa a ser

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{U}^T\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T\tilde{\mathbf{T}}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) + (\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}})^T\mathcal{Q}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) \tag{3.68}$$

com a sequência de controlo óptima dada por

$$\mathbf{U}^* = -\mathbf{K}\mathbf{x}(0) + \mathbf{K}_y\bar{\mathbf{Y}}, \tag{3.69}$$

e a sequência de estado óptima por

$$\mathbf{X}^* = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(0) + \mathcal{B}\mathbf{K}_y\bar{\mathbf{Y}}, \tag{3.70}$$

considerando

- $\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_0^T & \cdots & \bar{\mathbf{y}}_N^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_y(N+1)}$;
- $\mathcal{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \cdots, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \in \mathbb{R}^{n_y(N+1) \times n_y(N+1)}$;
- $\mathcal{W} = \text{diag}(\mathbf{W}, \mathbf{W}, \cdots, \mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{n_u N \times n_u N}$;
- $\tilde{\mathbf{W}} = \bar{\mathcal{B}}^T\mathcal{Q}\bar{\mathcal{B}} + \mathcal{W}$;
- $\tilde{\mathbf{T}} = \bar{\mathcal{B}}^T\mathcal{Q}$;
- $\mathbf{K}_y = \tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}$;
- $\mathbf{K} = \mathbf{K}_y\bar{\mathcal{A}}$.

3.6 Controlador Preditivo baseado em Modelos (MPC)

Nesta Secção introduz-se o conceito de MPC e como é implementado para resolver diferentes problemas já mencionados anteriormente. Para o desenvolvimento desta Secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente ao auxílio de [25, 69, 91].

O MPC pretende resolver em cada instante de tempo o problema de controlo óptimo para um horizonte de tempo finito e com o estado mais recente como a condição inicial da predição, gerando uma sequência de controlo óptima onde o primeiro elemento dessa sequência é aplicado no sistema, sujeito a restrições de modelo, estado ou entrada e resolvendo o problema outra vez no próximo instante de tempo com o estado atualizado e com o horizonte deslocado para o instante seguinte.

O MPC, ilustrado na Figura 3.5, segue assim uma estratégia de [93]

- Predição do comportamento futuro através do modelo do sistema;
- Optimização em tempo real de maneira a minimizar a diferença entre a predição e a referência, através da manipulação da ação de controlo;
- Horizonte estendido ao resolver em cada instante de tempo o problema de optimização para um horizonte de tempo finito.

Para além disso, o MPC destaca-se de outros controladores pela capacidade e facilidade em incorporar restrições no problema de optimização, o que permite ter um controlador mais preparado para lidar com situações como limitações físicas do sistema, por exemplo limitações energéticas, ou restrições de segurança. Outras características deste controlador incluem a capacidade de lidar facilmente com sistemas multi-variáveis e também a sua diversidade de métodos, seja linear, não linear, híbrido, robusto, explícito, distribuído, etc.

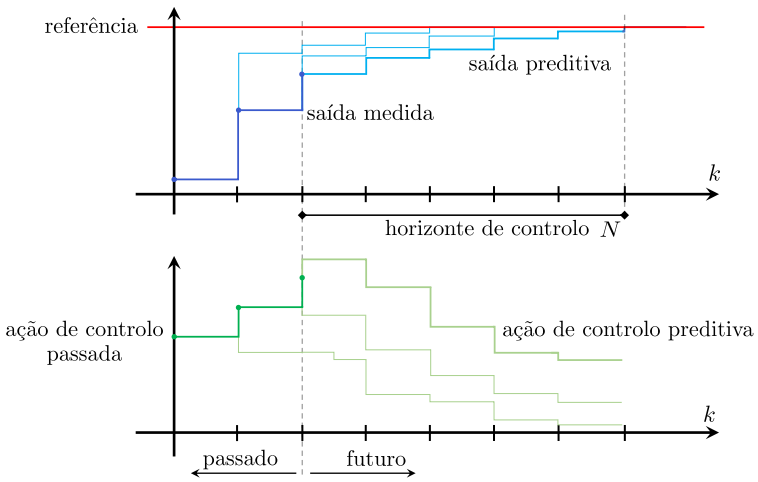


Figura 3.5: Ilustração do MPC, adaptado de [91]

3.6.1 Problema de Regulação para o MPC Linear sem Restrições

Relembrando o problema de controlo óptimo de regulação sem restrições para a formulação *batch*

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(0)^T \tilde{\mathbf{Q}}_r \mathbf{x}(0) \tag{3.71}$$

que apresenta a sequência de controlo óptima

$$\mathbf{U}^* = -\mathbf{K}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* & \mathbf{u}_1^* & \dots & \mathbf{u}_{N-1}^* \end{bmatrix}^T \tag{3.72}$$

então, a lei de controlo do horizonte estendido é dada por

$$\mathbf{u}(t_k) = \mathbf{u}_0^* = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{K}_0 \mathbf{x}(0). \tag{3.73}$$

O MPC segue o seguinte algoritmo [91] para o problema de regulação sem restrições:

1. Considerar o estado atual $\mathbf{x}(t_k)$ como a condição inicial $\mathbf{x}_0$ para o problema de controlo óptimo;
2. Obter a sequência de controlo óptima $\mathbf{U}^*$ resolvendo o problema de controlo óptimo;
3. Se o problema não for viável, terminar o algoritmo;
4. Aplicar a primeira ação de controlo de $\mathbf{U}^*$ no sistema, $\mathbf{u}(t_k) = \mathbf{u}_0^* = -\mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t_k)$;
5. Repetir passo 1 para o próximo instante de tempo, t_{k+1}, até ao fim do seu funcionamento.

3.6.2 Problema de Seguimento para o MPC Linear sem Restrições

Relativamente ao problema de controlo óptimo de seguimento sem restrições para a formulação *batch*

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{T}} (\bar{A}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) + (\bar{A}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}})^T \mathcal{Q} (\bar{A}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) \tag{3.74}$$

que apresenta a sequência de controlo óptima

$$\mathbf{U}^* = -\mathbf{K}\mathbf{x}(0) + \mathbf{K}_y \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* & \mathbf{u}_1^* & \dots & \mathbf{u}_{N-1}^* \end{bmatrix}^T \tag{3.75}$$

então, a lei de controlo do horizonte estendido, assumindo a referência $\bar{\mathbf{y}}$ como constante, é dada por

$$\mathbf{u}(t_k) = \mathbf{u}_0^* = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_u} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{K}\mathbf{x}(0) + \mathbf{K}_y \bar{\mathbf{Y}}) = -\mathbf{K}_0 \mathbf{x}(0) + \mathbf{K}_{y0} \bar{\mathbf{y}}(0) \tag{3.76}$$

com um algoritmo de horizonte estendido equivalente ao apresentado na Subsecção 3.6.1.

4

MPC Linear para Rendezvous de Dois Satélites

Com o objetivo de compreender e desenvolver técnicas cooperativas para múltiplos satélites é preciso primeiro perceber como funciona o método de *rendezvous* mais simples, através de um Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC) linear que seja capaz de lidar com uma dinâmica relativa expressa pelas equações de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH) [20]. Esta estratégia deve satisfazer as restrições mais relevantes e estudadas para este tipo de manobras, como por exemplo a de ação de controlo, a de velocidade, desvio de obstáculos e Linha de Visão (*Line Of Sight*) (LOS). Agregaram-se características de diferentes artigos, nomeadamente [13, 47, 94], para desenvolver o MPC deste Capítulo que vai servir de base para os métodos propostos nos Capítulos seguintes.

Apresenta-se assim a dinâmica do sistema que se quer implementar, bem como o problema de optimização, as restrições consideradas, os parâmetros de simulação e os resultados obtidos para diferentes situações de teste que envolvem diferentes usos das restrições já mencionadas.

4.1 Dinâmica do Sistema

Considere-se um sistema composto por dois satélites, um *chaser* ativo e um *target* passivo, onde o *chaser* realiza um conjunto de manobras para se aproximar do *target* e manter uma posição relativa constante. Para isso, recorre-se às equações lineares de CWH, assumindo uma órbita circular à volta da Terra para o *target*, uma distância relativa entre os satélites muito menor em comparação com a distância ao centro da Terra, com uma separação máxima dos satélites na ordem das dezenas de quilómetros [5, 31], desprezando qualquer perturbação e ainda assumindo que a massa dos satélites é muito menor que a massa da Terra.

Relembrando as equações de CWH que foram apresentadas em 3.3 e que são dadas pela expressão (3.33), pode-se considerar um vetor de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$, composto pela posição relativa $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ e pela velocidade relativa $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$, ambas expressas no referencial orbital $\mathcal{F}^{to}$ centrado no *target*. Ou seja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & \mathbf{v}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

onde

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \tag{4.2}$$

e

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 3n^2 x + 2n\dot{y} + u_x \\ -2n\dot{x} + u_y \\ -n^2 z + u_z \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

tal que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ é a ação de controlo do *chaser* e $n = \sqrt{\frac{\mu}{r_t^3}}$ é a taxa orbital do *target*, dependente do parâmetro gravitacional padrão da Terra μ e do raio orbital do *target* r_t.

Ao reescrever esta dinâmica no formato de espaço de estado obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{cw}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{cw}\mathbf{u}(t) \tag{4.4}$$

equivalente a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

e que vai ser discretizado aplicando o método Retentor de Ordem Zero (*Zero-Order Hold*) (ZOH), passando para

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k. \tag{4.6}$$

Sendo um problema de seguimento considera-se também uma equação de saída definida por

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \tag{4.7}$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^6$ é a variável de saída idêntica ao vetor de estado. E tendo em conta a equação de saída para descrever o sistema discreto no formato de *batch* com o horizonte de controlo N, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^N \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

equivalente a

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathcal{B}}\mathbf{U}. \tag{4.9}$$

4.2 Problema de Controlo Óptimo

O problema de optimização que se pretende incorporar neste MPC é dado por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_{N-1}} \quad & \mathbf{V}_0 = (\mathbf{y}_N - \bar{\mathbf{y}}_N)^T \mathbf{P} (\mathbf{y}_N - \bar{\mathbf{y}}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{W} \mathbf{u}_k \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \quad \forall_{k=0,\dots,N-1}, \\ & \mathbf{x}_k \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}, \quad \forall_{k=0,\dots,N-1}, \\ & \mathbf{x}_N \in \mathcal{X}(N) \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^6$ é a referência, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ a penalização sobre o desvio final, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ a penalização sobre o desvio em relação à referência, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a penalização sobre a ação de controlo, $\mathcal{X}$ o conjunto de restrições lineares para as variáveis de estado e $\mathcal{U}$ o conjunto de restrições lineares para as variáveis de controlo.

Passando para o formato de *batch* obtém-se

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}} \quad & \mathbf{V}_0 = \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{T}} (\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) + (\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}})^T \mathcal{Q} (\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{M}\mathbf{U} \leq \mathbf{w} \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde

- $\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_0^T & \cdots & \bar{\mathbf{y}}_N^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$;
- $\mathcal{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \cdots, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \in \mathbb{R}^{6(N+1)\times 6(N+1)}$;
- $\mathcal{W} = \text{diag}(\mathbf{W}, \mathbf{W}, \cdots, \mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{3N\times 3N}$;
- $\tilde{\mathbf{W}} = \bar{\mathcal{B}}^T \mathcal{Q} \bar{\mathcal{B}} + \mathcal{W}$;
- $\tilde{\mathbf{T}} = \bar{\mathcal{B}}^T \mathcal{Q}$

e para além disso

$$\mathbf{M}\mathbf{U} \leq \mathbf{w} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}_v \\ \mathbf{M}_{obs} \\ \mathbf{M}_{los} \end{bmatrix} \mathbf{U} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{w}_u \\ \mathbf{w}_v \\ \mathbf{w}_{obs} \\ \mathbf{w}_{los} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

que representa o conjunto de restrições de desigualdade na notação de *batch* e que vão ser deduzidas na Secção seguinte.

Considerando apenas o problema de optimização sem restrições com notação *batch*, a condição de estacionaridade vai ser dada por

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{V}_0|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{U}^* + 2\tilde{\mathbf{T}}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0} \tag{4.13}$$

que permite obter a sequência de controlo óptima

$$\mathbf{U}^* = -(\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}\bar{\mathcal{A}})\mathbf{x}(0) + (\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}})\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* & \mathbf{u}_1^* & \dots & \mathbf{u}_{N-1}^* \end{bmatrix}^T \tag{4.14}$$

e a sequência de estado óptima

$$\mathbf{X}^* = (\mathcal{A} - \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}\bar{\mathcal{A}}))\mathbf{x}(0) + \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}})\bar{\mathbf{Y}}. \tag{4.15}$$

4.3 Restrições

4.3.1 Restrição de Ação de Controlo

As restrições de ação de controlo permitem restringir o combustível gasto pelos propulsores, sendo as restrições físicas mais comuns em sistemas deste género. Restrição dada por

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{u}_{max} \tag{4.16}$$

sendo $\mathbf{u}_{min}$ e $\mathbf{u}_{max}$ as constantes que limitam a ação de controlo $\mathbf{u}$.

Considerando a sequência de controlo $\mathbf{U}$, a restrição de ação de controlo para uma notação *batch* pode ser definida como

$$\mathbf{U}_{min} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{U}_{max} \tag{4.17}$$

onde $\mathbf{U}_{max} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_{max}^T & \dots & \mathbf{u}_{max}^T\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\mathbf{U}_{min} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_{min}^T & \dots & \mathbf{u}_{min}^T\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N}$, que podem ser separadas em duas desigualdades

$$-\mathbf{U} \leq -\mathbf{U}_{min}, \quad \mathbf{U} \leq \mathbf{U}_{max} \tag{4.18}$$

e que matricialmente podem ser expressas por

$$\begin{bmatrix}-\mathbf{I}_{3N} \\ \mathbf{I}_{3N}\end{bmatrix}\mathbf{U} \leq \begin{bmatrix}-\mathbf{U}_{min} \\ \mathbf{U}_{max}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{M}_u\mathbf{U} \leq \mathbf{w}_u. \tag{4.19}$$

4.3.2 Restrição de Velocidade

Para operações de proximidade entre dois satélites torna-se muito importante restringir e controlar a velocidade relativa, em caso de emergência ou imprevistos que podem resultar na colisão dos dois satélites devido a velocidades elevadas ou ainda para auxiliar no acoplamento gradual dos satélites.

Sendo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{bmatrix}^T$ a velocidade relativa entre o *target* e o *chaser*, a restrição de velocidade relativa pode ser dada pelo sistema de equações

$$\begin{cases}\dot{x}_{min} \leq \dot{x}(k) \leq \dot{x}_{max} \\ \dot{y}_{min} \leq \dot{y}(k) \leq \dot{y}_{max} \\ \dot{z}_{min} \leq \dot{z}(k) \leq \dot{z}_{max}\end{cases} \tag{4.20}$$

onde $\begin{bmatrix}\dot{x}_{max} & \dot{y}_{max} & \dot{z}_{max}\end{bmatrix}$ representam os limites máximos da velocidade relativa em cada direção e $\begin{bmatrix}\dot{x}_{min} & \dot{y}_{min} & \dot{z}_{min}\end{bmatrix}$ representam os limites mínimos. Que matricialmente fica

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{y}(k) \leq \begin{bmatrix}-\dot{x}_{min} \\ -\dot{y}_{min} \\ -\dot{z}_{min} \\ \dot{x}_{max} \\ \dot{y}_{max} \\ \dot{z}_{max}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{a}_v\mathbf{y}(k) \leq \mathbf{b}_v. \tag{4.21}$$

Considerando a sequência de saída $\mathbf{Y}$, a restrição de velocidade para uma notação *batch* pode ser definida por

$$\mathbf{A}_v\mathbf{Y} \leq \mathbf{B}_v \Leftrightarrow \mathbf{A}_v(\bar{A}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathcal{B}}\mathbf{U}) \leq \mathbf{B}_v \tag{4.22}$$

sendo $\mathbf{A}_v = \text{diag}(\mathbf{a}_v, \cdots, \mathbf{a}_v) \in \mathbb{R}^{6(N+1)\times 6(N+1)}$ e $\mathbf{B}_v = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_v^T & \dots & \mathbf{b}_v^T\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$.

Ficando

$$\mathbf{A}_v\bar{\mathcal{B}}\mathbf{U} \leq \mathbf{B}_v - \mathbf{A}_v\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) \Leftrightarrow \mathbf{M}_v\mathbf{U} \leq \mathbf{w}_v. \tag{4.23}$$

4.3.3 Restrição de Desvio de Obstáculos

Outra restrição relevante para um sistema com múltiplos agentes são as restrições de desvio de obstáculos, que impedem a colisão entre esses agentes ou com outros objetos. Por exemplo, para acoplar dois satélites mas existe lixo espacial na vizinhança do qual se quer desviar para evitar uma colisão. Geralmente, o problema do desvio considera os obstáculos como uma esfera, que representa a zona interdita a passar. Matematicamente a restrição de desvio entre o *chaser* e um obstáculo δ pode ser definido por

$$r_{c-\delta}^2 = (x - x_\delta)^2 + (y - y_\delta)^2 + (z - z_\delta)^2 \geq r_\delta^2 \tag{4.24}$$

sendo $\mathbf{p}_\delta = \begin{bmatrix}x_\delta & y_\delta & z_\delta\end{bmatrix}^T$ a posição do obstáculo expressa em $\mathcal{F}^{to}$, r_δ o raio da esfera que representa o obstáculo e $r_{c-\delta}$ a distância entre o obstáculo e o *chaser*. Restrição ilustrada na Figura 4.1.

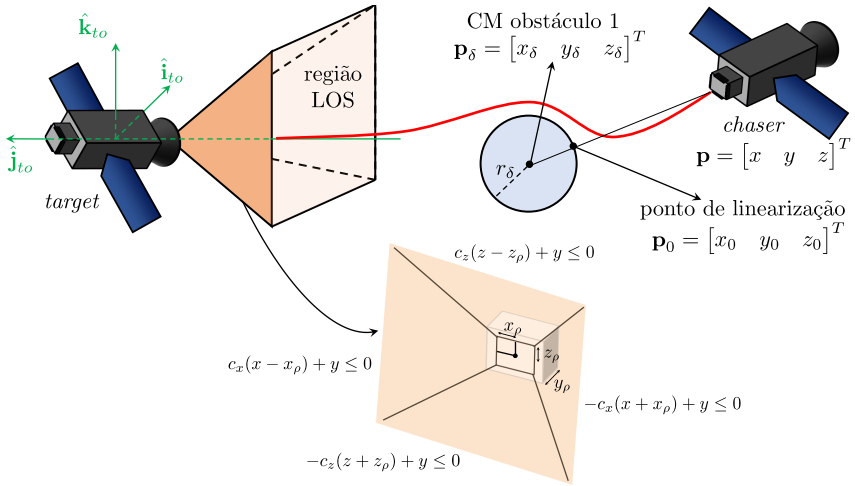


Figura 4.1: Representação das restrições de desvio de obstáculos e de LOS

A equação (4.24) pode ser linearizada à volta de $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{bmatrix}^T$, que é o ponto de interseção entre a superfície da esfera que representa o obstáculo e a reta imaginária que passa pelo centro massa do obstáculo e do *chaser*. Esta posição pode ser calculada a partir da expressão

$$\mathbf{p}_0 = (1 - \frac{r_\delta}{r_{c-\delta}})\mathbf{p}_\delta + \frac{r_\delta}{r_{c-\delta}}\mathbf{p} \tag{4.25}$$

e caso se considere o *target* como o obstáculo, o $\mathbf{p}_0$ representa o porto de acoplamento.

Para realizar a linearização recorre-se à série de Taylor em ordem ao ponto $\mathbf{p}_0$, tal que

$$r_{c-\delta}^2 \approx r_{c-\delta}^2\Big|_{\mathbf{p}_0} + \left.\frac{\partial r_{c-\delta}^2}{\partial x}\right|_{\mathbf{p}_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial r_{c-\delta}^2}{\partial y}\right|_{\mathbf{p}_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial r_{c-\delta}^2}{\partial z}\right|_{\mathbf{p}_0}(z-z_0) \tag{4.26}$$

com

$$r_{c-\delta}^2\Big|_{\mathbf{p}_0} = (x_0-x_\delta)^2 + (y_0-y_\delta)^2 + (z_0-z_\delta)^2, \tag{4.27}$$

$$\left.\frac{\partial r_{c-\delta}^2}{\partial x}\right|_{\mathbf{p}_0}(x-x_0) = 2(x_0-x_\delta)(x-x_0), \tag{4.28}$$

$$\left.\frac{\partial r_{c-\delta}^2}{\partial y}\right|_{\mathbf{p}_0}(y-y_0) = 2(y_0-y_\delta)(y-y_0), \tag{4.29}$$

$$\left.\frac{\partial r_{c-\delta}^2}{\partial z}\right|_{\mathbf{p}_0}(z-z_0) = 2(z_0-z_\delta)(z-z_0) \tag{4.30}$$

e que resulta na nova restrição de desvio de obstáculos dada por

$$\begin{aligned} r_{c-\delta}^2 \approx & (x_0-x_\delta)^2 + (y_0-y_\delta)^2 + (z_0-z_\delta)^2 \\ & + 2(x_0-x_\delta)(x-x_0) + 2(y_0-y_\delta)(y-y_0) + 2(z_0-z_\delta)(z-z_0) \geq r_\delta^2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

que pode ser matricialmente representada por

$$\mathbf{a}_{obs}\mathbf{y}(k) \leq b_{obs} \tag{4.32}$$

com

$$\mathbf{a}_{obs} = \begin{bmatrix} -2(x_0-x_\delta) & -2(y_0-y_\delta) & -2(z_0-z_\delta) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

e

$$b_{obs} = (x_0-x_\delta)^2 + (y_0-y_\delta)^2 + (z_0-z_\delta)^2 - 2(x_0-x_\delta)x_0 - 2(y_0-y_\delta)y_0 - 2(z_0-z_\delta)z_0 - r_\delta^2. \tag{4.34}$$

Considerando a sequência de saída $\mathbf{Y}$, a restrição de desvio de obstáculos para uma notação *batch* pode ser definida como

$$\mathbf{A}_{obs}\mathbf{Y} \leq \mathbf{B}_{obs} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{obs}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathcal{B}}\mathbf{U}) \leq \mathbf{B}_{obs} \tag{4.35}$$

sendo $\mathbf{A}_{obs} = \text{diag}(\mathbf{a}_{obs}, \cdots, \mathbf{a}_{obs}) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times 6(N+1)}$ e $\mathbf{B}_{obs} = \begin{bmatrix} b_{obs} & \dots & b_{obs} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Ficando

$$\mathbf{A}_{obs}\bar{\mathcal{B}}\mathbf{U} \leq \mathbf{B}_{obs} - \mathbf{A}_{obs}\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) \Leftrightarrow \mathbf{M}_{obs}\mathbf{U} \leq \mathbf{w}_{obs}. \tag{4.36}$$

Esta restrição tem no entanto algumas limitações, uma vez que a linearização de uma esfera num ponto resulta num plano, logo, o satélite vai-se desviar desse plano para cada optimização do MPC em vez de desviar da esfera que representa o obstáculo. O que significa definir um $\mathbf{p}_0$, e consequentemente um $\mathbf{a}_{obs}$ e b_{obs}, dependentes de cada $\mathbf{p}(k)$ ao longo do horizonte. Considera-se por sua vez que, para as escalas consideradas, esta restrição é razoável.

4.3.4 Restrição de Linha de Visão (LOS)

Para além de restrições físicas e de desvio de obstáculos, em casos de acoplamento ou aproximação é necessário ter restrições de linha de visão para garantir que o *chaser* é visível a todo o tempo pelo porto de acoplamento do *target*, região que pode ser representada por um poliedro [52, 95] e que pode ser expressa pelo referencial $\mathcal{F}^{to}$, uma vez que se considera um *target* estável.

Assim, o *chaser* encontra-se dentro da região de LOS, representada na Figura 4.1, se respeitar o seguinte sistema de equações expresso no referencial $\mathcal{F}^{to}$

$$\begin{cases} c_x(x - x_\rho) + y \leq 0 \\ -c_x(x + x_\rho) + y \leq 0 \\ c_z(z - z_\rho) + y \leq 0 \\ -c_z(z + z_\rho) + y \leq 0 \\ y + y_\rho \leq 0 \end{cases} \tag{4.37}$$

e que matricialmente pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(k) \leq \begin{bmatrix} -y_\rho \\ c_x x_\rho \\ c_x x_\rho \\ c_z z_\rho \\ c_z z_\rho \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{a}_{los}\mathbf{y}(k) \leq \mathbf{b}_{los} \tag{4.38}$$

onde c_x e c_z são as inclinações do cone tetraédrico, por exemplo se $c_x = 1$ a inclinação é de 45° e $\begin{bmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \end{bmatrix}$ são as dimensões do porto de acoplamento do *target*.

Considerando a sequência de saída $\mathbf{Y}$, a restrição de LOS para uma notação *batch* pode ser definida por

$$\mathbf{A}_{los}\mathbf{Y} \leq \mathbf{B}_{los} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{los}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathcal{B}}\mathbf{U}) \leq \mathbf{B}_{los} \tag{4.39}$$

sendo $\mathbf{A}_{los} = \text{diag}(\mathbf{a}_{los}, \cdots, \mathbf{a}_{los}) \in \mathbb{R}^{6(N+1)\times 6(N+1)}$ e $\mathbf{B}_{los} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{los}^T & \cdots & \mathbf{b}_{los}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$.

Ficando

$$\mathbf{A}_{los}\bar{\mathcal{B}}\mathbf{U} \leq \mathbf{B}_{los} - \mathbf{A}_{los}\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) \Leftrightarrow \mathbf{M}_{los}\mathbf{U} \leq \mathbf{w}_{los}. \tag{4.40}$$

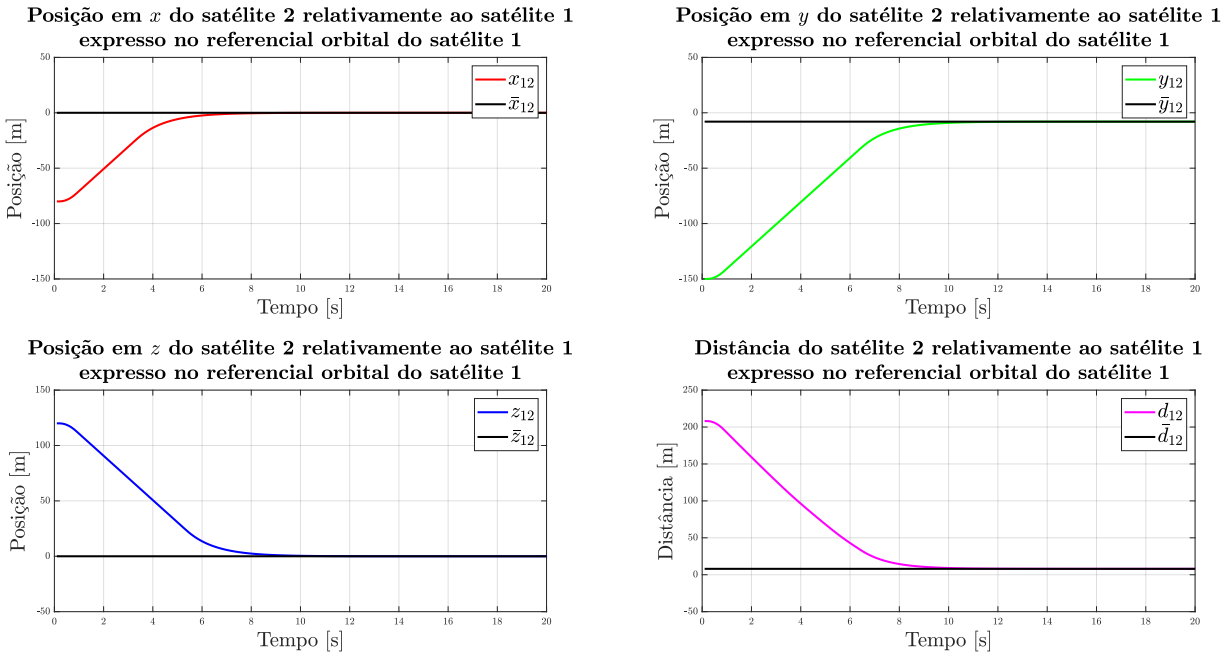
4.4 Simulação e Resultados

Para simular o MPC proposto neste Capítulo recorre-se à plataforma MATLAB ® R2019A com o auxílio da rotina quadprog (.) para resolver o problema de optimização, simulando a mesma dinâmica que foi usada para formular este MPC e desprezando o uso de ruído ou sensores. A fim de demonstrar as capacidades do MPC que foi formulado simulam-se diferentes situações de teste, realçando o comportamento do sistema face às diferentes restrições impostas. Os parâmetros utilizados para as simulações encontram-se na Tabela 4.1.

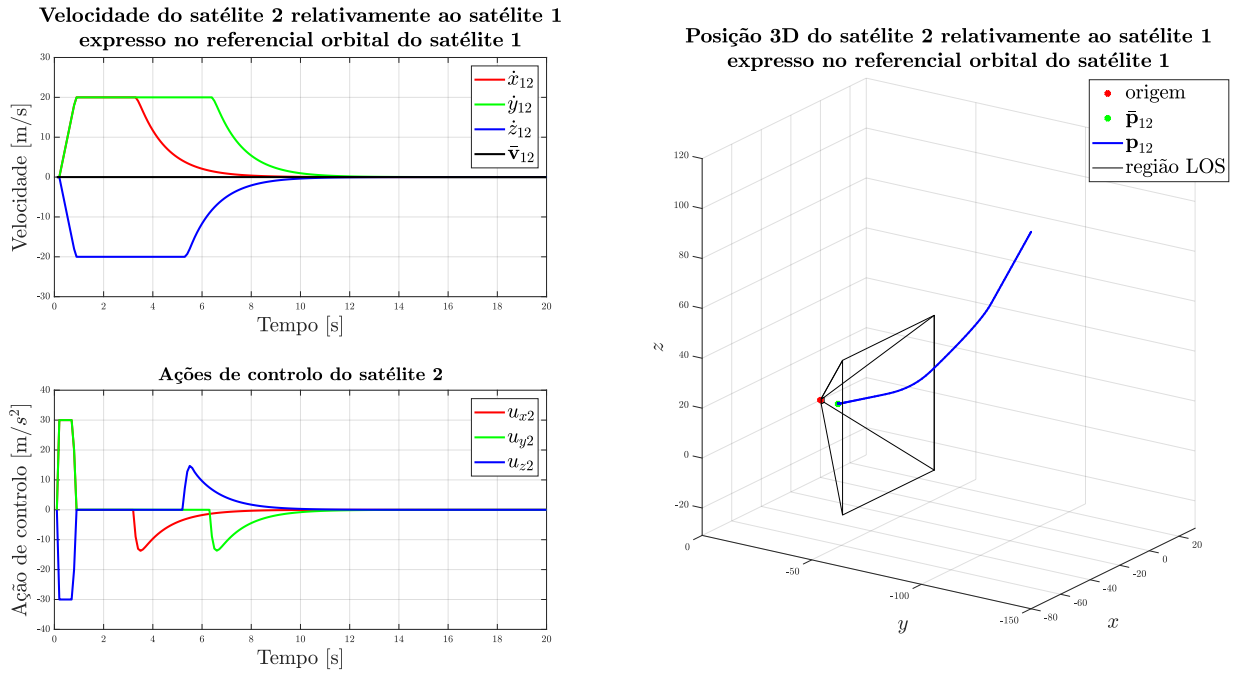
Tabela 4.1: Parâmetros de simulação do MPC para o *rendezvous* de dois satélites

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
condições ambientais			
parâmetro gravitacional da Terra	μ	$3.986\,004\,41 \times 10^{14}$	$\mathrm{m^3\,s^{-2}}$
condições do satélite			
raio orbital do *target*	r_t	7178160	m
condições iniciais			
posição inicial	$\mathbf{p}(0)$	$\begin{bmatrix}-80 & -150 & 120\end{bmatrix}^T$	m
velocidade inicial	$\mathbf{v}(0)$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
referências			
referência	$\bar{\mathbf{y}}$	$\begin{bmatrix}0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	
configuração do MPC			
tempo de amostragem	T_s	0.1	s
número de iterações	n_k	200	
horizonte de controlo	N	25	
penalização sobre o desvio final	$\mathbf{P}$	$15\mathbf{I}_6$	
penalização sobre o desvio	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{I}_6$	
penalização de controlo	$\mathbf{W}$	$0.1\mathbf{I}_3$	
restrições			
ação de controlo máxima	$\mathbf{u}_{max}$	30	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
velocidade máxima	$\mathbf{v}_{max}$	20	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
posição do obstáculo 1	$\mathbf{p}_{\delta 1}$	$\begin{bmatrix}-5.7 & -72.7 & 42.7\end{bmatrix}^T$	m
posição do obstáculo 2	$\mathbf{p}_{\delta 2}$	$\begin{bmatrix}-0.7 & -30.7 & 4.8\end{bmatrix}^T$	m
raio do obstáculo	r_δ	5	m
inclinação do cone LOS em X	c_x	1	
inclinação do cone LOS em Z	c_z	1	
dimensões do porto	$\begin{bmatrix}x_\rho & y_\rho & z_\rho\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$	m

O primeiro teste considera apenas as restrições de ação de controlo, de velocidade e de LOS para o *rendezvous* de dois satélites, como se pode observar na Figura 4.2.



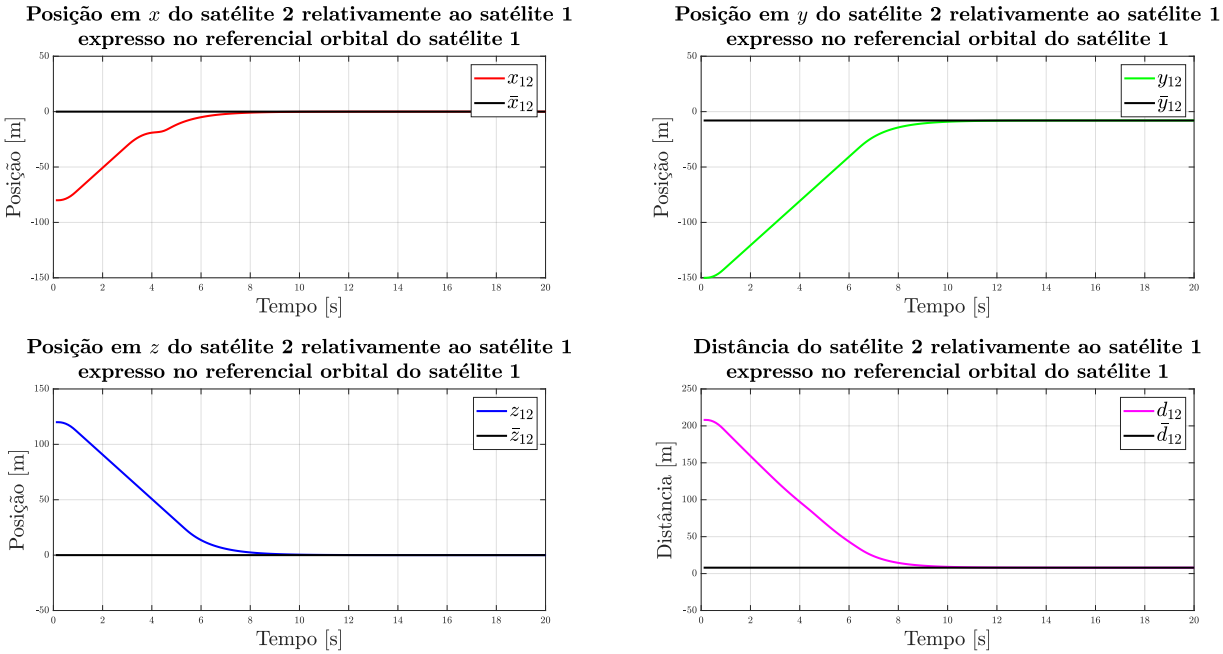
(a)



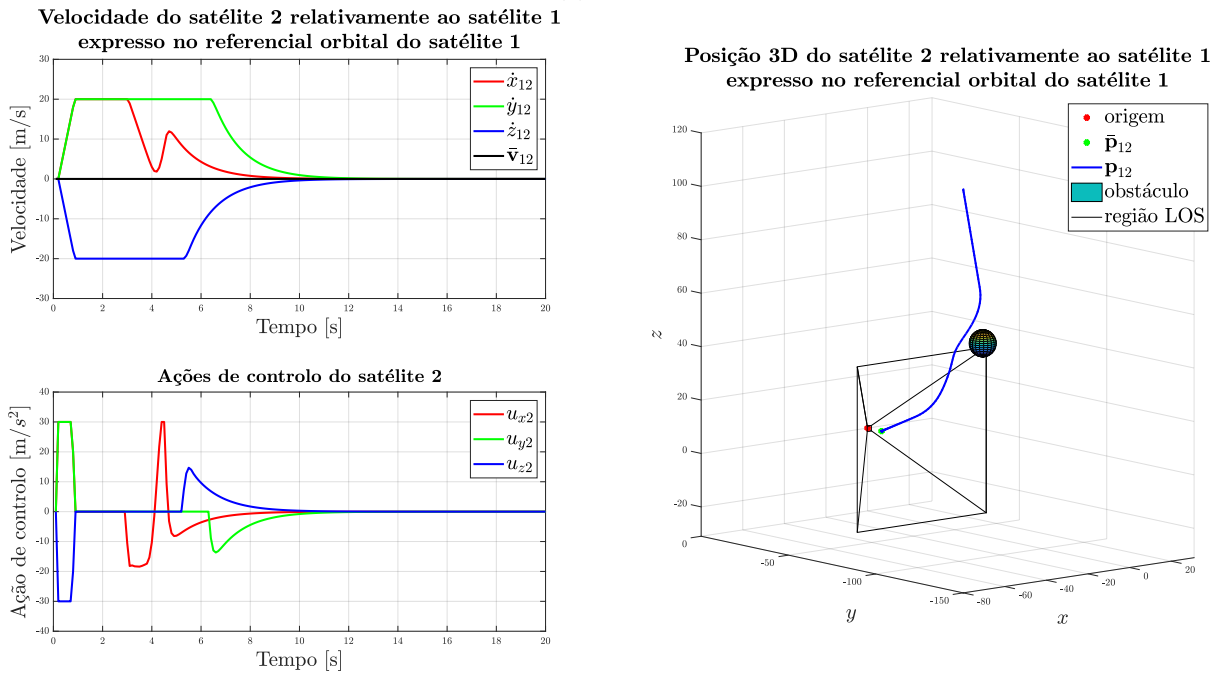
(b)

Figura 4.2: Resultados do 1º teste do MPC linear para o *rendezvous* de dois satélites

O segundo teste já engloba todas as restrições, nomeadamente restrições de ação de controlo, de velocidade, desvio de obstáculos e de LOS para o *rendezvous* de dois satélites, como se pode observar na Figura 4.3.



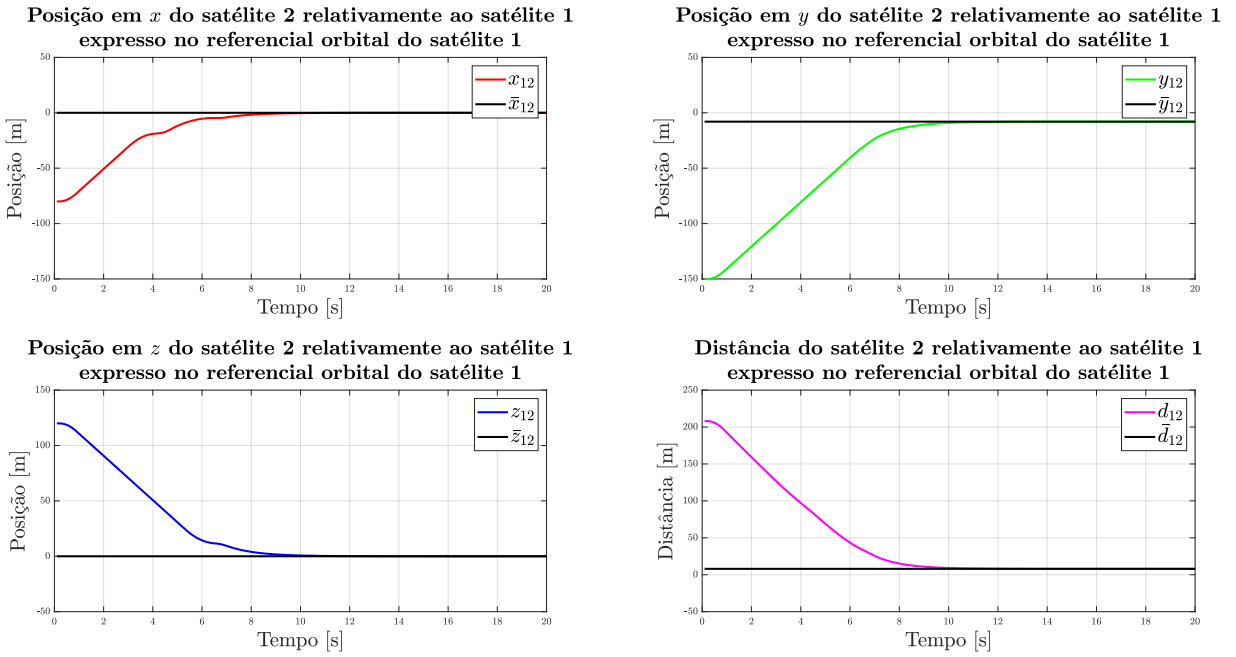
(a)



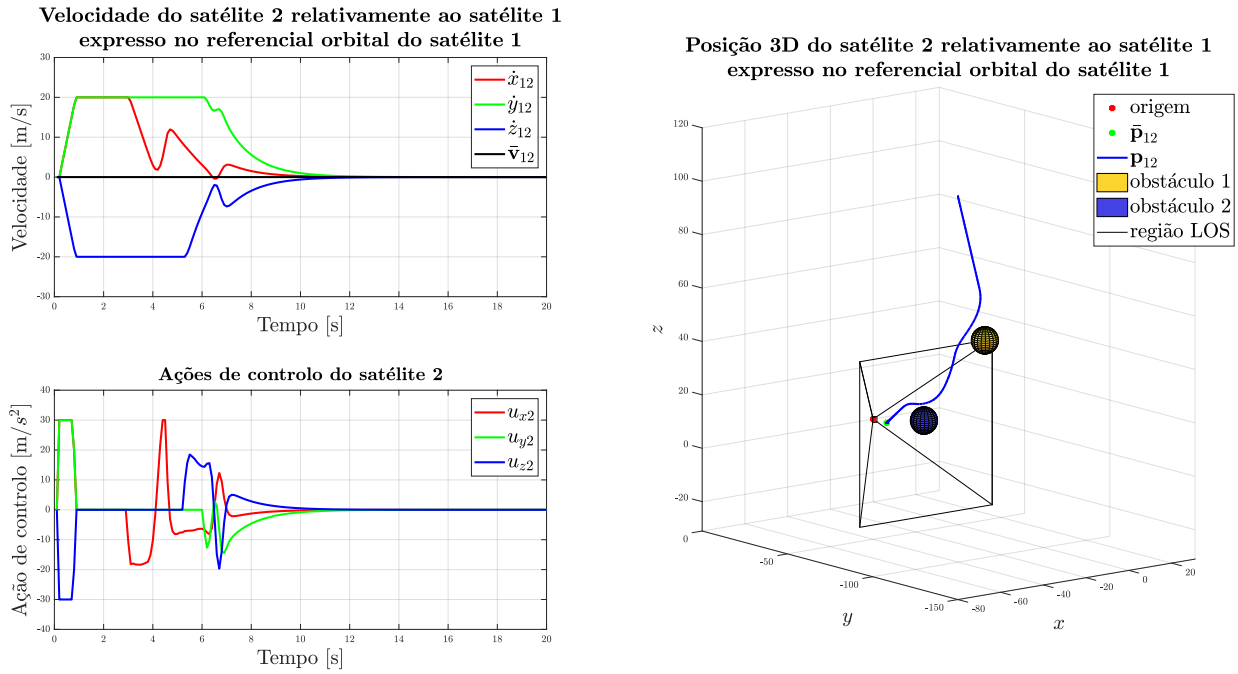
(b)

Figura 4.3: Resultados do 2º teste do MPC linear para o *rendezvous* de dois satélites

O terceiro teste engloba outra vez todas as restrições para o *rendezvous* de dois satélites mas agora com dois obstáculos, como se pode observar na Figura 4.4.



(a)



(b)

Figura 4.4: Resultados do 3º teste do MPC linear para o *rendezvous* de dois satélites

Como se pode observar pelas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, em todas as situações a estratégia proposta consegue conduzir com sucesso os satélites para os valores desejados, respeitando ao mesmo tempo todas as restrições que foram impostas para cada teste com um comportamento que vai de acordo com as penalizações consideradas. Na Tabela 4.2 é possível ainda observar os resultados de cada teste tendo em conta três métodos de desempenho que são respetivamente a Raiz do Erro Quadrático Médio (*Root Mean Square Error*) (RMSE), a energia despendida média e o erro de saída final.

Tabela 4.2: Desempenho da simulação do MPC para o *rendezvous* de dois satélites

Teste	$\sqrt{\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1}\|\|\mathbf{y}(k)-\bar{\mathbf{y}}(k)\|\|^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1}\|\|\mathbf{u}(k)\|\|^2}$ $[\mathrm{m\,s^{-2}}]$	$\|\|\mathbf{y}(n_k)-\bar{\mathbf{y}}(n_k)\|\|$
1	73.108	10.538	2.899×10^{-4}
2	73.190	11.553	2.919×10^{-4}
3	73.219	12.165	3.376×10^{-4}

Analisando os resultados do primeiro teste, presentes na Figura 4.2, pode-se concluir que a posição converge continuamente sem oscilação e sem sobrelevação para a referência, enquanto que na velocidade existe um aumento de velocidade absoluta inicial até atingir o limite da restrição imposta e depois converge continuamente para zero.

O segundo teste apenas se diferencia do primeiro ao adicionar uma restrição de desvio de obstáculos, obstáculo este que foi posicionado num dos pontos da trajetória do primeiro teste, de maneira a ver o comportamento e eficácia desta restrição. Tendo em conta os resultados presentes na Figura 4.3 pode-se observar que este se assemelha muito aos resultados do primeiro teste, excepto no que toca aos elementos relativos a x.

Pode-se assim concluir que, dado o obstáculo situado na trajetória de aproximação, foi realizado um desvio com maior ênfase na componente em x. Isto resulta numa convergência para a posição desejada em x menos linear e numa reação mais oscilatória para a sua velocidade e ação de controlo. Desvio que se encontra claramente representado na Figura 4.3 b) relativa à evolução da posição 3D.

No terceiro teste são considerados dois obstáculos, sendo que ambos foram posicionados com o propósito de interromper a trajetória do primeiro teste. Tendo em conta os resultados presentes na Figura 4.4 pode-se observar que este se assemelha aos resultados do primeiro teste, só que agora existem perturbações em x e em z, que vêm dos desvios efetuados e que se encontram representados na Figura 4.4 b).

De notar que a oscilação do segundo e terceiro teste podiam ter sido melhoradas com diferentes parâmetros de simulação, mas o objetivo era ter os mesmos parâmetros para todas as situações de teste. No entanto, ao comparar os desempenhos dos diferentes testes a partir da Tabela 4.2, como seria de esperar, o primeiro teste apresenta os melhores resultados em todos os critérios e o terceiro teste apresenta os piores, apesar de ser uma diferença pouco significativa.

5

MPC Distribuído para Pelotão de Múltiplos Satélites

A formação de voo para múltiplos satélites tem sido sujeita a constantes desenvolvimentos nos últimos tempos pela sua diversa aplicabilidade no que toca ao futuro das missões espaciais. Uma das suas potenciais capacidades é a sincronização de múltiplos satélites de maneira a que os satélites seguidores consigam convergir todos para a órbita de um satélite líder e depois estabelecer uma posição relativa constante entre eles. Este método de sincronização autónomo cooperativo é denominado no meio automóvel por pelotão, ou do inglês *platooning*, que se tem tornado cada vez mais relevante com a expansão dos veículos automóveis inteligentes [78, 96–98].

O pelotão para veículos espaciais, recorrendo a uma trajetória para Manter a Distância Orbital (*Orbital Station Keeping*) (OSK), é capaz de corrigir a posição de um satélite que se tenha desviado da órbita desejada devido a erros de lançamento ou de perturbações externas, reter o satélite numa dada órbita ou ainda manter um satélite a uma posição relativa constante a outro corpo. Este tipo de problemas é especialmente interessante para satélites geoestacionários, de observação da Terra e de Órbita Terrestre Baixa (*Low Earth Orbit*) (LEO) [99]. Dando como exemplo os satélites de observação da Terra, um sistema de pelotão permite recolher informação sobre a situação ambiental da Terra em diferentes instantes de tempo, informação que pode ser útil para prever ou avaliar um dado comportamento ambiental. Outros exemplos de aplicações incluem o seguimento e observação de objetos ou ainda o uso de interferometria para a geração de mapas topográficos [100].

Para controlar este tipo de sistemas recorre-se ao Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC), incorporando também conceitos de cooperação distribuída de maneira a interligar os múltiplos satélites. Com esse objectivo implementa-se um algoritmo distribuído e deduz-se uma nova dinâmica relativa, baseada nas equações de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH) [20] que permite interligar os satélites através das suas

ações de controlo e formar uma topologia de rede em série.

Apresenta-se assim a dinâmica do sistema que se quer implementar, ilustrado na Figura 5.1, bem como o problema de optimização, o algoritmo distribuído a ser incorporado no MPC e os resultados obtidos para diferentes situações de teste.

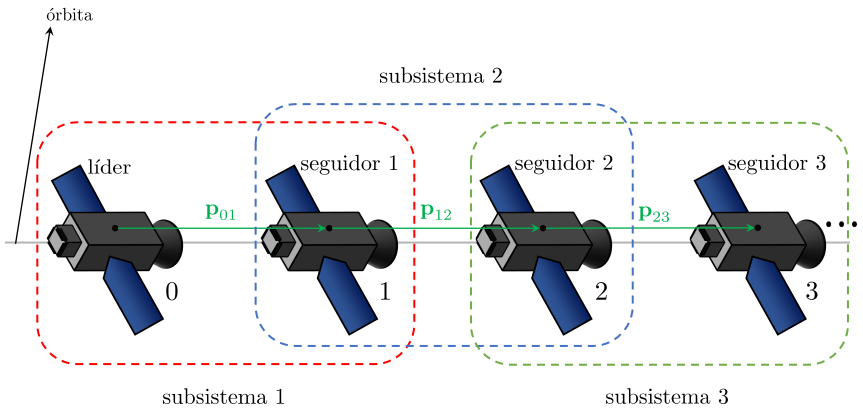


Figura 5.1: Pelotão de múltiplos satélites em órbita

5.1 Dinâmica do Sistema

Considere-se um sistema composto por λ satélites com massas m_j, $j = 0, 1, ..., \lambda - 1$, tal que, todo o satélite $j \neq 0$ quer seguir o satélite $j-1$ numa trajetória para OSK em V-Bar com posição relativa constante e é seguido pelo satélite $j+1$ da mesma forma, sendo $j = 0$ o satélite líder passivo e $j > 0$ os satélites seguidores ativos. Assume-se também uma órbita circular à volta da Terra para o líder, uma distância relativa entre os satélites muito menor em comparação com a distância ao centro da Terra, com uma separação próxima o suficientemente entre todos os satélites para ter uma dinâmica relativa linear sem grande perda de generalidade, desprezando qualquer perturbação e ainda que a massa dos satélites é muito menor que a massa da Terra. Neste Capítulo, considera-se a formação líder-seguidor sempre que se refere o sistema de pelotão completo, enquanto que a formação *target-chaser* é apenas relativa ao subsistema ou agente composto por dois satélites.

Uma das condições das equações de CWH é que o *target* permanece passivo, o que significa que a sua ação de controlo é zero. Sendo assim, nesta proposta as equações de CWH devem ser modificadas a fim de obter um movimento relativo acoplado entre cada satélite, onde a ação de controlo interliga os diversos modelos relativos.

Relembrando a Secção 3.3 que apresenta os conceitos fundamentais da dinâmica translacional relativa, sabe-se que a aceleração de um satélite expressa no referencial de inércia $\mathcal{F}^i$ é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = -\frac{\mu}{r_s^3}\mathbf{r}_s + \frac{1}{m_s}\mathbf{F}_s \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{r}_s \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de posição do satélite expresso em $\mathcal{F}^i$, r_s a sua magnitude, μ o parâmetro gravitacional padrão da Terra e $\mathbf{F}_s = F_{x,s}\hat{\mathbf{i}}_{to} + F_{y,s}\hat{\mathbf{j}}_{to} + F_{z,s}\hat{\mathbf{k}}_{to}$ é o vetor de forças do satélite s.

Ora, a aceleração do *target* e do *chaser*, a partir da expressão (5.1), vão ser dadas respetivamente por

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t + \frac{1}{m_t}\mathbf{F}_t \tag{5.2}$$

e

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \frac{1}{m_c}\mathbf{F}_c \tag{5.3}$$

dando origem à equação de aceleração relativa

$${}^i\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\mathbf{r}}_c - \ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t + \frac{1}{m_c}\mathbf{F}_c - \frac{1}{m_t}\mathbf{F}_t \tag{5.4}$$

que aplicando métodos demonstrados anteriormente, permite obter o sistema de equações

não linear para órbitas circulares

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2(r_t + x) + \mu \frac{r_t + x}{[(x+r_t)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = u_{x,c} - u_{x,t} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y + \mu \frac{y}{[(x+r_t)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = u_{y,c} - u_{y,t} \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{[(x+r_t)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = u_{z,c} - u_{z,t} \end{cases} \tag{5.5}$$

sendo $n = \sqrt{\frac{\mu}{r_t^3}}$ a taxa orbital do *target*, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ a posição relativa e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ a velocidade relativa ambas expressas no referencial orbital $\mathcal{F}^{to}$ centrado no *target*, $\mathbf{u}_c = \frac{\mathbf{F}_c}{m_c} = \begin{bmatrix} u_{x,c} & u_{y,c} & u_{z,c} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ é a ação de controlo do *chaser* e $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F}_t}{m_t} = \begin{bmatrix} u_{x,t} & u_{y,t} & u_{z,t} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ é a ação de controlo do *target*.

A expressão (5.5) pode ser linearizada em torno do ponto de origem de $\mathcal{F}^{to}$, resultando no sistema de equações linear

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3n^2 x - 2n\dot{y} = u_{x,c} - u_{x,t} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = u_{y,c} - u_{y,t} \\ \ddot{z} + n^2 z = u_{z,c} - u_{z,t} \end{cases} \tag{5.6}$$

que ao reescrever no formato de espaço de estado para uma formação *target-chaser* do subsistema j obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{A}_{cw}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{B}_{cw}\mathbf{u}_j(t) - \mathbf{B}_{cw}\mathbf{u}_{j-1}(t) \Leftrightarrow \tag{5.7}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_j(t) \\ \dot{y}_j(t) \\ \dot{z}_j(t) \\ \ddot{x}_j(t) \\ \ddot{y}_j(t) \\ \ddot{z}_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \\ z_j(t) \\ \dot{x}_j(t) \\ \dot{y}_j(t) \\ \dot{z}_j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j,x}(t) \\ u_{j,y}(t) \\ u_{j,z}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j-1,x}(t) \\ u_{j-1,y}(t) \\ u_{j-1,z}(t) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

sendo n agora a taxa orbital do líder e com a ação de controlo do líder $\mathbf{u}_0$ nula. De notar que o subsistema j tem o satélite j como o *chaser* e o satélite $j-1$ como o *target*.

Então, o modelo relativo conjunto para λ satélites é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_{\lambda-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cw} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{cw} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{cw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\lambda-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cw} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\mathbf{B}_{cw} & \mathbf{B}_{cw} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{B}_{cw} & \mathbf{B}_{cw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\lambda-2}(t) \\ \mathbf{u}_{\lambda-1}(t) \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

equivalente a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(t) \tag{5.10}$$

e que vai ser discretizado aplicando o método Retentor de Ordem Zero (*Zero-Order Hold*) (ZOH), passando para a versão compacta

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{5.11}$$

Sendo um problema de seguimento considera-se também uma equação de saída definida por

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{5.12}$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{6(\lambda-1)}$ é a variável de saída idêntica ao vetor de estado. Tendo em conta a equação de saída para descrever o sistema discreto no formato de *batch* com o horizonte de controlo N, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^N \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

equivalente a

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) + \bar{\mathcal{B}}\mathbf{U}. \tag{5.14}$$

5.2 Problema de Controlo Óptimo

A função de custo que se pretende incorporar neste MPC distribuído é dada por

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(0),\mathbf{U}) = \sum_{j=1}^{\lambda-1} \alpha_j \mathbf{V}_j(\mathbf{x}_j(0),\mathbf{U}) \tag{5.15}$$

onde para cada agente ou subsistema j, a sua função de custo quadrática cooperativa é dada pela combinação dos objetivos de cada agente, ou seja,

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(0),\mathbf{U}) = \zeta_j(\mathbf{y}(N) - \bar{\mathbf{y}}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{\Gamma}_j(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k), \mathbf{u}(k)) \tag{5.16}$$

com

$$\mathbf{\Gamma}_j(\mathbf{y}_e,\mathbf{u}) = \mathbf{y}_e^T \operatorname{diag}(\alpha_1\mathbf{Q}_1,\cdots,\alpha_{\lambda-1}\mathbf{Q}_{\lambda-1})\mathbf{y}_e + \mathbf{u}_j^T \alpha_j \mathbf{W}_j \mathbf{u}_j + \text{cnst} \tag{5.17}$$

e

$$\zeta_j(\mathbf{y}_e) = \mathbf{y}_e^T \operatorname{diag}(\alpha_1\mathbf{P}_1,\cdots,\alpha_{\lambda-1}\mathbf{P}_{\lambda-1})\mathbf{y}_e \tag{5.18}$$

onde α_j é o peso da função de custo do agente j, $\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{y}}_1^T & \cdots & \bar{\mathbf{y}}_{\lambda-1}^T\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6(\lambda-1)}$ é a referência, $\bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbb{R}^6$ a referência do agente j, $\mathbf{P}_j \in \mathbb{R}^{6\times6}$ a penalização sobre o desvio final, $\mathbf{Q}_j \in \mathbb{R}^{6\times6}$ a penalização sobre o desvio em relação à referência e $\mathbf{W}_j \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a penalização sobre a ação de controlo de j.

Então o problema de controlo óptimo com restrições para cada agente j é dado por

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{U}_j} \quad & \mathbf{V}(\mathbf{x}(0),\mathbf{U}) \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^+ = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \forall_{k=0,\ldots,N-1}, \\
& \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{u}_j \in \mathcal{U}_j, \quad \forall_{k=0,\ldots,N-1}, \\
& \mathbf{x}(N) \in \mathcal{X}_f
\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde $\mathcal{X}$ é o conjunto de restrições lineares para as variáveis de estado e $\mathcal{U}$ o conjunto de restrições lineares para as variáveis de controlo.

Passando para o formato de *batch*, o modelo do agente j pode ser definido como

$$\mathbf{Y}_j = \bar{A}_j \mathbf{x}_j(0) + \bar{\mathcal{B}}_{jj}\mathbf{U}_j + \bar{\mathcal{B}}_{ji}\mathbf{U}_i \tag{5.20}$$

que resulta no problema de optimização

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{U}_j} \quad & \mathbf{V}(\mathbf{x}(0),\mathbf{U}) = \mathbf{U}_j^T \tilde{\mathbf{W}}_j \mathbf{U}_j + 2\tilde{\mathbf{T}}_j^T \mathbf{U}_j \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{M}_j \mathbf{U}_j \leq \mathbf{w}_j
\end{aligned} \tag{5.21}$$

onde

$$\tilde{\mathbf{W}}_j = \mathcal{W}_j + \bar{\mathcal{B}}_{jj}^T \mathcal{Q}_j \bar{\mathcal{B}}_{jj} + \bar{\mathcal{B}}_{ij}^T \mathcal{Q}_i \bar{\mathcal{B}}_{ij}, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}}_j =&(\bar{\mathcal{B}}_{jj}^T\mathcal{Q}_j\bar{\mathcal{A}}_j)\mathbf{x}_j(0)-(\bar{\mathcal{B}}_{jj}^T\mathcal{Q}_j)\bar{\mathbf{Y}}_j+(\bar{\mathcal{B}}_{ij}^T\mathcal{Q}_i\bar{\mathcal{A}}_i)\mathbf{x}_i(0)-(\bar{\mathcal{B}}_{ij}^T\mathcal{Q}_i)\bar{\mathbf{Y}}_i+\\ &(\bar{\mathcal{B}}_{jj}^T\mathcal{Q}_j\bar{\mathcal{B}}_{ji}+\bar{\mathcal{B}}_{ij}^T\mathcal{Q}_i\bar{\mathcal{B}}_{ii})\mathbf{U}_i=\\ &\mathbf{T}_{jjx}\mathbf{x}_j(0)-\mathbf{T}_{jjy}\bar{\mathbf{Y}}_j+\mathbf{T}_{jix}\mathbf{x}_i(0)-\mathbf{T}_{jiy}\bar{\mathbf{Y}}_i+\mathbf{T}_{jiu}\mathbf{U}_i\end{aligned} \tag{5.23}$$

e

- $\bar{\mathbf{Y}}_j=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{y}}_j^T & \cdots & \bar{\mathbf{y}}_j^T\end{bmatrix}^T\in\mathbb{R}^{6(N+1)}$;
- $\mathcal{Q}_j=\alpha_j\,\mathrm{diag}(\mathbf{Q},\mathbf{Q},\cdots,\mathbf{Q},\mathbf{P})\in\mathbb{R}^{6(N+1)\times 6(N+1)}$;
- $\mathcal{W}_j=\alpha_j\,\mathrm{diag}(\mathbf{W},\mathbf{W},\cdots,\mathbf{W})\in\mathbb{R}^{3N\times 3N}$.

Aplicando a condição de estacionaridade $\nabla_{\mathbf{U}_j}\mathbf{V}_j\big|_{\mathbf{U}_j=\mathbf{U}_j^*}=\mathbf{0}$, a sequência de controlo óptima para o agente j sem ter em conta as restrições fica

$$\mathbf{U}_j^*=\mathbf{K}_{jj}\mathbf{x}_j(0)+\mathbf{K}_{jjy}\bar{\mathbf{Y}}_j+\mathbf{K}_{ji}\mathbf{x}_i(0)+\mathbf{K}_{jiy}\bar{\mathbf{Y}}_i+\mathbf{L}_j\mathbf{U}_i \tag{5.24}$$

com $\mathbf{K}_{ji}=-\tilde{\mathbf{W}}_j^{-1}\mathbf{T}_{jix}$, $\mathbf{K}_{jiy}=\tilde{\mathbf{W}}_j^{-1}\mathbf{T}_{jiy}$ e $\mathbf{L}_j=-\tilde{\mathbf{W}}_j^{-1}\mathbf{T}_{jiu}$ e ao combinar a sequência de controlo óptima de todos os agentes obtém-se

$$\mathbf{U}^*=\mathbf{K}\mathbf{x}(0)+\mathbf{K}_y\bar{\mathbf{Y}}+\mathbf{L}\mathbf{U}. \tag{5.25}$$

Relativamente às restrições, o conjunto de restrições de desigualdades na notação de *batch* para j é dada por

$$\mathbf{M}_j\mathbf{U}_j\leq\mathbf{w}_j\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{j,u}\\ \mathbf{M}_{j,v}\\ \mathbf{M}_{j,obs}\\ \mathbf{M}_{j,los}\end{bmatrix}\mathbf{U}_j\leq\begin{bmatrix}\mathbf{w}_{j,u}\\ \mathbf{w}_{j,v}\\ \mathbf{w}_{j,obs}\\ \mathbf{w}_{j,los}\end{bmatrix} \tag{5.26}$$

já apresentados anteriormente na Secção 4.3.

5.3 Algoritmo Distribuído

A convergência do controlo distribuído pode ser atingido através de diversos métodos, sendo umas dessas técnicas o passo convexo distribuído [69], representado na Figura 5.2. Para o passo convexo considere-se que a próxima iteração $\mathbf{U}_j^{\gamma+1}$ é dada pela combinação convexa da solução óptima atual $\mathbf{U}_j^*$ e da iteração anterior $\mathbf{U}_j^{\gamma}$, ou seja

$$\mathbf{U}_j^{\gamma+1} = w_j \mathbf{U}_j^* + (1-w_j)\mathbf{U}_j^{\gamma}, \quad 0 < w_j < 1 \tag{5.27}$$

onde $\gamma \geq 0$ é o valor inteiro da iteração e w_j é o peso da combinação, tal que, $\sum_{k=1}^{\lambda-1} w_k = 1$. Assim, a solução de controlo é uma combinação da solução atual e da anterior em vez de considerar apenas $\mathbf{U}_j^{\gamma+1} = \mathbf{U}_j^*$, que pode levar a instabilidade uma vez que existe a possibilidade de não chegar a um consenso entre os vários agentes envolvidos. A sequência de

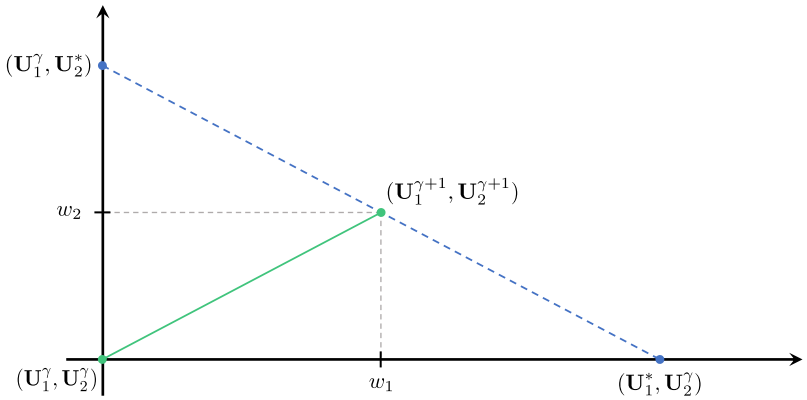


Figura 5.2: Representação exemplo do passo convexo para dois agentes, adaptado de [69]

controlo óptima com restrições para o agente j é determinada como função das condições iniciais de todos os agentes e pelas sequências de controlo passadas dos outros agentes, ou seja,

$$\mathbf{U}_j^*(\mathbf{x}(0), \mathbf{U}_{j\neq i}^{\gamma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_j^*(0) & \mathbf{u}_j^*(1) & \cdots & \mathbf{u}_j^*(N-1) \end{bmatrix}^T \tag{5.28}$$

que ao aplicar n_γ vezes o passo convexo (5.27) permite obter a nova sequência $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j^{n_\gamma}$ e do qual vai ser aplicado o primeiro elemento de $\mathbf{U}_j$ no sistema, $\mathbf{u}_j(t_k) = \mathbf{u}_j(0)$. Finalmente, a solução $\mathbf{U}_j$ é usada como condição inicial da próxima optimização

$$\mathbf{U}_j^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_j(1) & \cdots & \mathbf{u}_j(N-1) & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{5.29}$$

Com esta abordagem, ao satisfazer as condições de estabilidade exponencial para o MPC sub óptimo [69] e assumindo que os sistemas $(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j)$ são estabilizáveis, que $(\mathbf{A}_j, \mathbf{C}_j)$ e $(\mathbf{A}_j, \mathbf{Q}_j)$ são detetáveis, que $\mathbf{W}_j$ são positivos definidos enquanto que $\mathbf{P}_j$ e $\mathbf{Q}_j$ são positivos semi-definidos e que o horizonte N é longo o suficiente para zerar os modos instáveis do sistema, para $j = 1, ..., \lambda - 1$, então a solução convergente do problema distribuído cooperativo é igual à do problema centralizado [69].

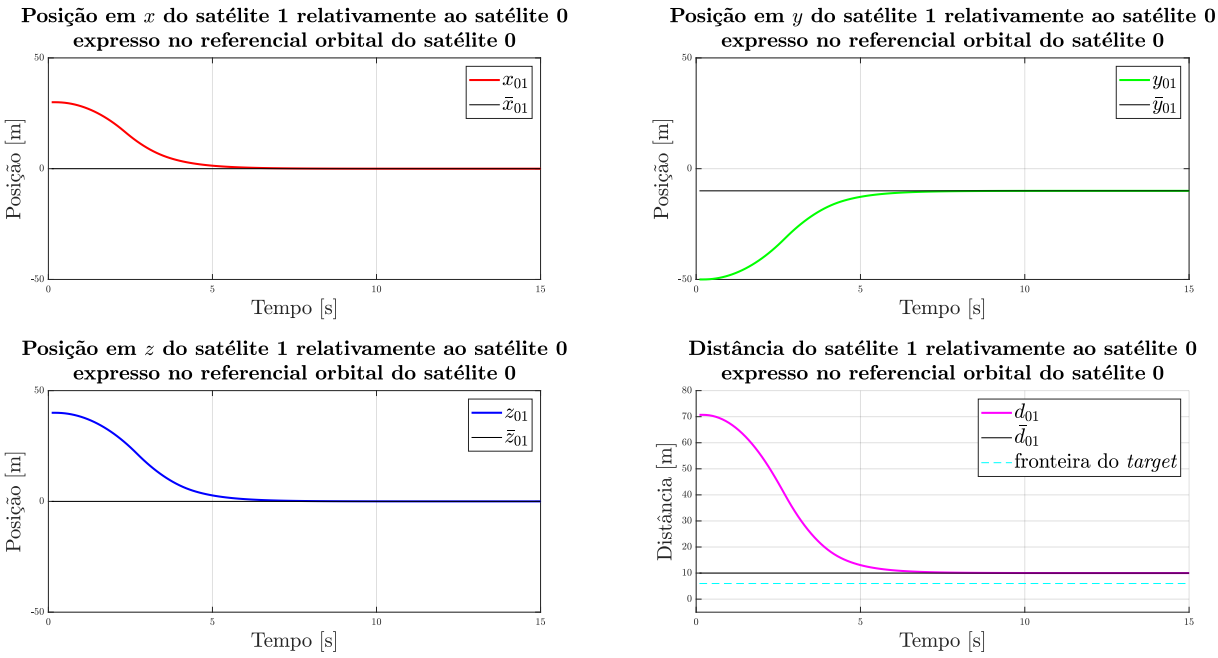
5.4 Simulação e Resultados

Para simular o MPC proposto neste Capítulo recorre-se à plataforma MATLAB ® R2019A com o auxílio da rotina quadprog(.) para resolver o problema de optimização, simulando a mesma dinâmica que foi usada para formular este MPC e desprezando o uso de ruído ou sensores.

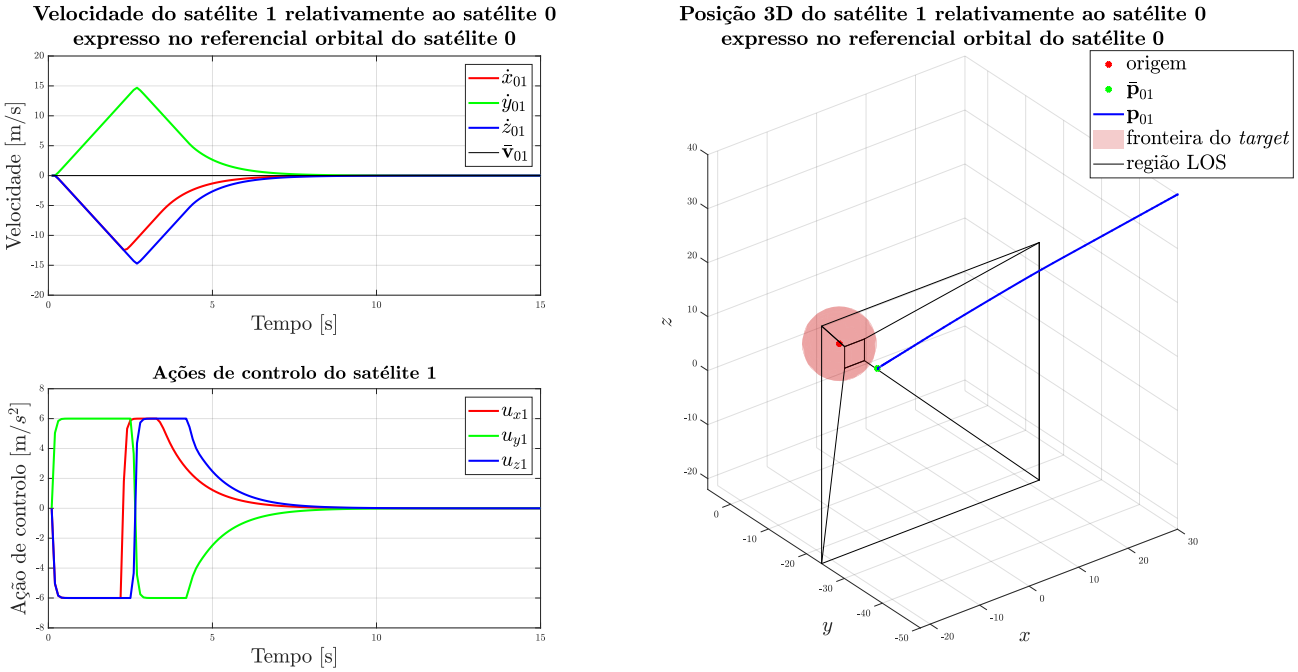
O primeiro teste considera um sistema composto por três satélites, com restrições de ação de controlo, de velocidade, Linha de Visão (*Line Of Sight*) (LOS) e desvio de obstáculos para o *target*. Nas Figuras 5.3 e 5.4 é possível observar os resultados obtidos e na Tabela 5.1 os parâmetros de simulação.

Tabela 5.1: Parâmetros de simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, para a primeira situação de teste

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
condições ambientais			
parâmetro gravitacional da Terra	μ	$3.986\,004\,41 \times 10^{14}$	$\mathrm{m^3\,s^{-2}}$
condições do satélite			
raio orbital do líder	r_0	6621000	m
condições iniciais			
posição inicial do agente 1	$\mathbf{p}_{01}(0)$	$\begin{bmatrix}30 & -50 & 40\end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do agente 2	$\mathbf{p}_{12}(0)$	$\begin{bmatrix}15 & -46 & -30\end{bmatrix}^T$	m
velocidade inicial	$\mathbf{v}(0)$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
referências			
referência	$\bar{\mathbf{y}}$	$\begin{bmatrix}0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	
configuração do MPC			
tempo de amostragem	T_s	0.1	s
número de iterações	n_k	150	
horizonte de controlo	N	40	
penalização sobre o desvio final	$\mathbf{P}$	$25\mathbf{I}_6$	
penalização sobre o desvio	$\mathbf{Q}$	$8\mathbf{I}_6$	
penalização de controlo	$\mathbf{W}$	$0.1\mathbf{I}_3$	
número de iterações	γ	2	
peso da combinação convexa	$\begin{bmatrix}w_1 & w_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\end{bmatrix}$	
peso da função de custo	$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 1.5\end{bmatrix}$	
restrições			
ação de controlo máxima	$\mathbf{u}_{max}$	6	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
velocidade máxima	$\mathbf{v}_{max}$	20	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
posição do obstáculo	$\mathbf{p}_\delta$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	m
raio do obstáculo	r_δ	6	m
inclinação do cone LOS	$\begin{bmatrix}c_x & c_z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$	
dimensões do porto	$\begin{bmatrix}x_\rho & y_\rho & z_\rho\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 2 & 4\end{bmatrix}$	m

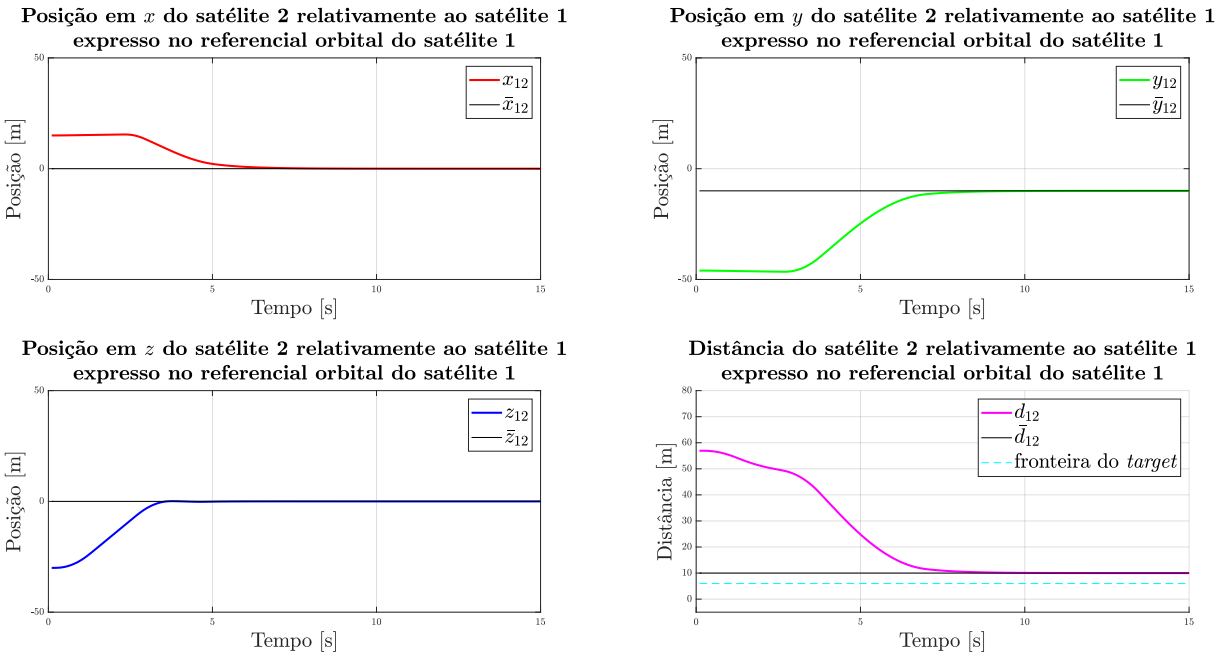


(a)

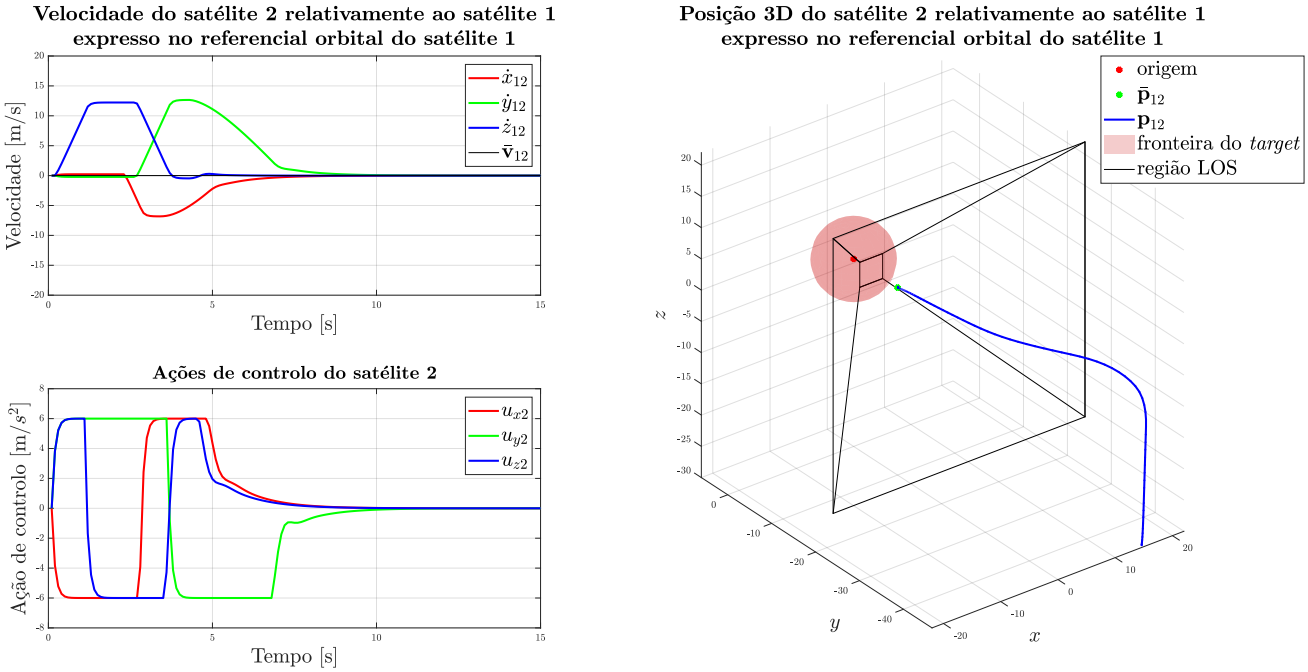


(b)

Figura 5.3: Resultados do 1º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 1



(a)



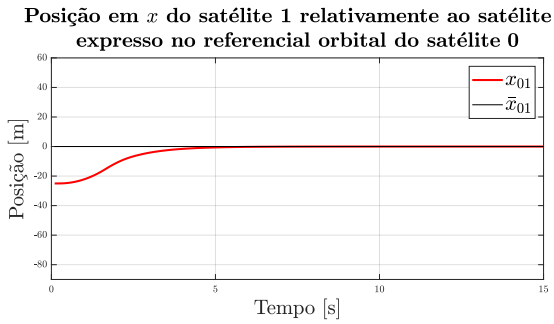
(b)

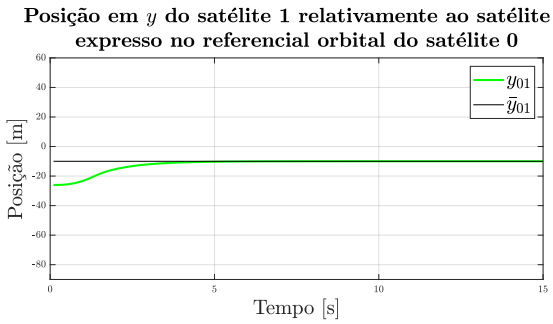
Figura 5.4: Resultados do 1º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 2

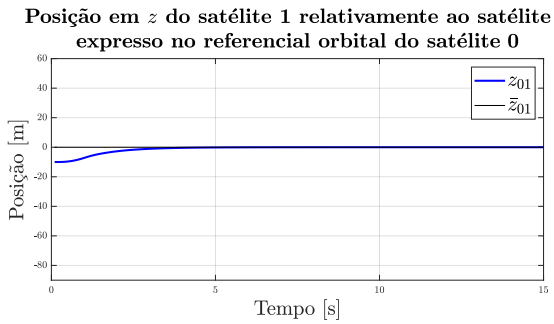
O segundo teste considera um sistema composto por quatro satélites, com restrições de ação de controlo, de velocidade, LOS e desvio de obstáculos para o *target*, sendo que as restrições de LOS se aplicam apenas ao primeiro agente. Nas Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 é possível observar os resultados obtidos e na Tabela 5.2 os parâmetros de simulação.

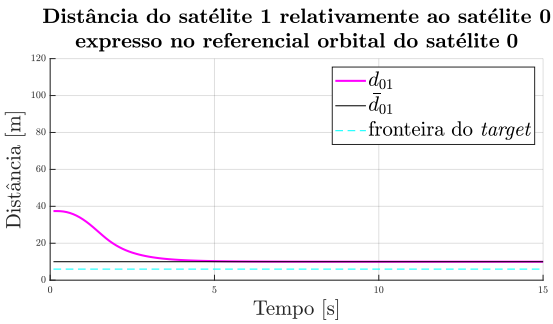
Tabela 5.2: Parâmetros de simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, para a segunda situação de teste

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
condições ambientais			
parâmetro gravitacional da Terra	μ	$3.986\,004\,41 \times 10^{14}$	$\mathrm{m^3\,s^{-2}}$
condições do satélite			
raio orbital do líder	r_0	6621000	m
condições iniciais			
posição inicial do agente 1	$\mathbf{p}_{01}(0)$	$\begin{bmatrix}-25 & -26 & 10\end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do agente 2	$\mathbf{p}_{12}(0)$	$\begin{bmatrix}-26 & -28 & 11\end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do agente 3	$\mathbf{p}_{23}(0)$	$\begin{bmatrix}60 & -90 & -45\end{bmatrix}^T$	m
velocidade inicial	$\mathbf{v}(0)$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
referências			
referência	$\bar{\mathbf{y}}$	$\begin{bmatrix}0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	
configuração do MPC			
tempo de amostragem	T_s	0.1	s
número de iterações	n_k	200	
horizonte de controlo	N	40	
penalização sobre o desvio final	$\mathbf{P}$	$25\mathbf{I}_6$	
penalização sobre o desvio	$\mathbf{Q}$	$8\mathbf{I}_6$	
penalização de controlo	$\mathbf{W}$	$0.1\mathbf{I}_3$	
número de iterações	γ	2	
peso da combinação convexa	$\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\end{bmatrix}$	
peso da função de custo	$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}$	
restrições			
ação de controlo máxima	$\mathbf{u}_{max}$	10	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
velocidade máxima do agente 1	$\mathbf{v}_{1max}$	20	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
velocidade máxima do agente 2	$\mathbf{v}_{2max}$	20	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
velocidade máxima do agente 3	$\mathbf{v}_{3max}$	35	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
posição do obstáculo	$\mathbf{p}_\delta$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	m
raio do obstáculo	r_δ	6	m
inclinação do cone LOS	$\begin{bmatrix}c_x & c_z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$	
dimensões do porto	$\begin{bmatrix}x_\rho & y_\rho & z_\rho\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\end{bmatrix}$	m

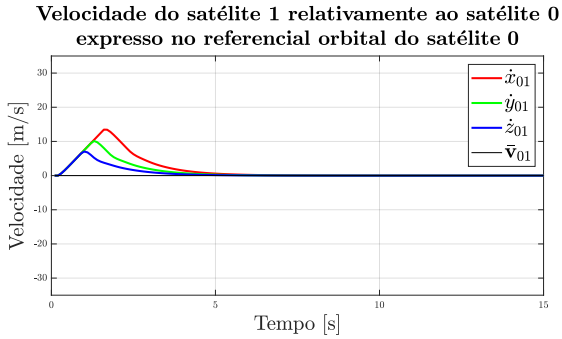


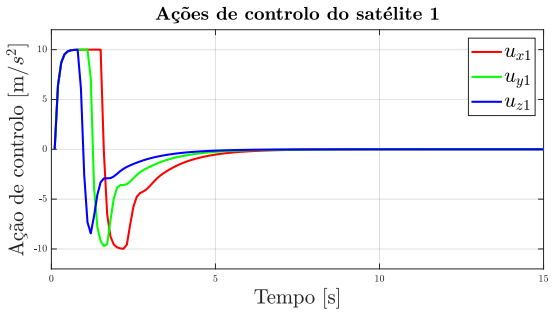


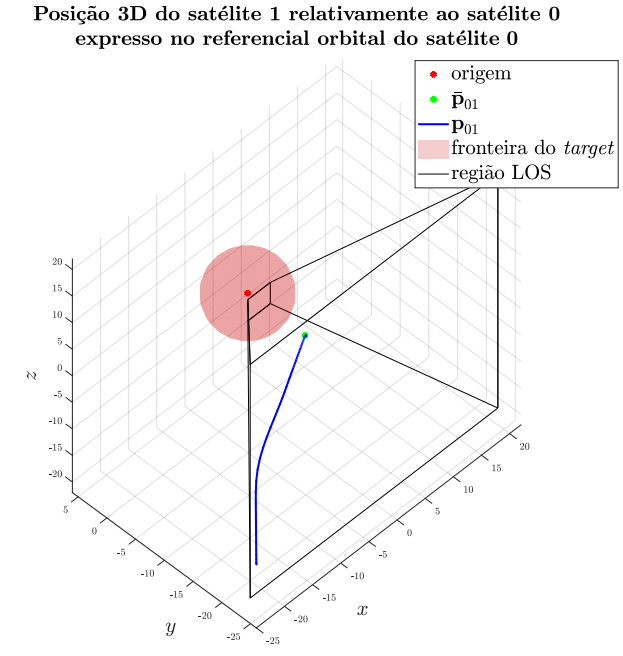




(a)

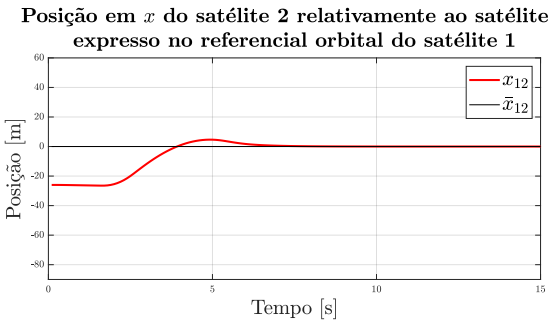


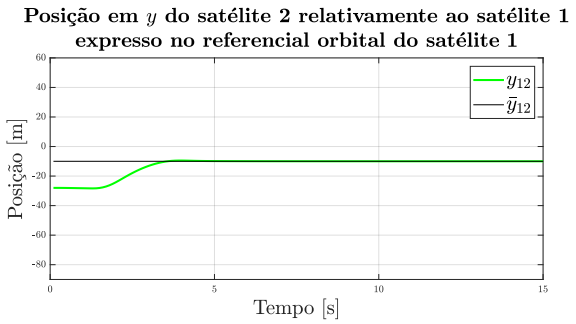


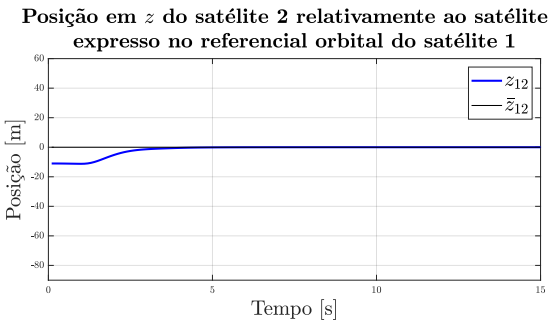


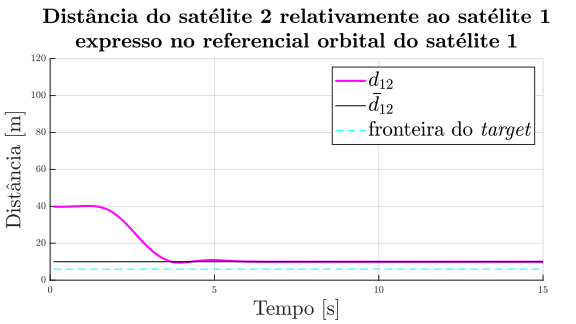
(b)

Figura 5.5: Resultados do 2º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 1

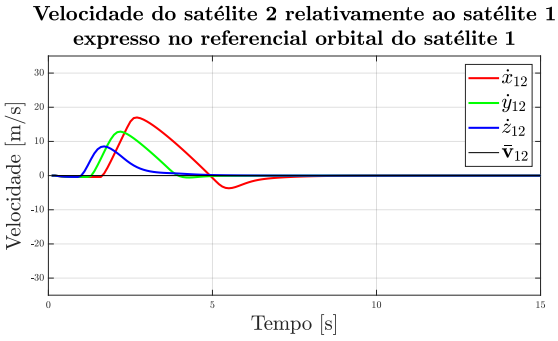


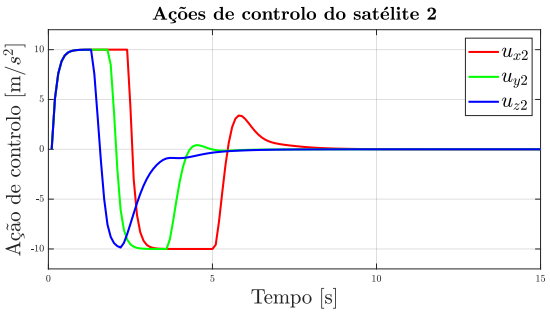


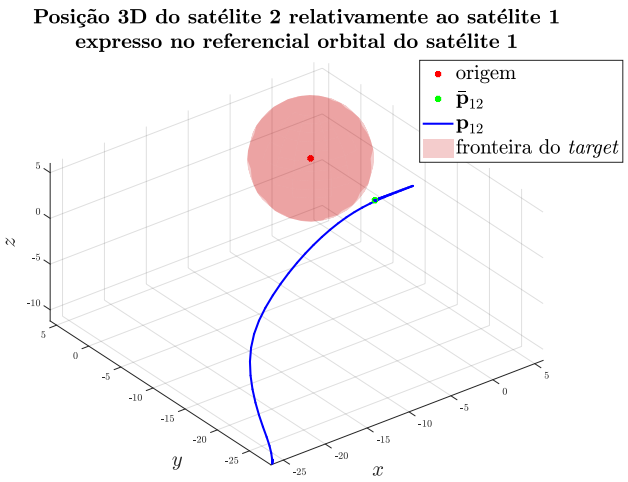




(a)

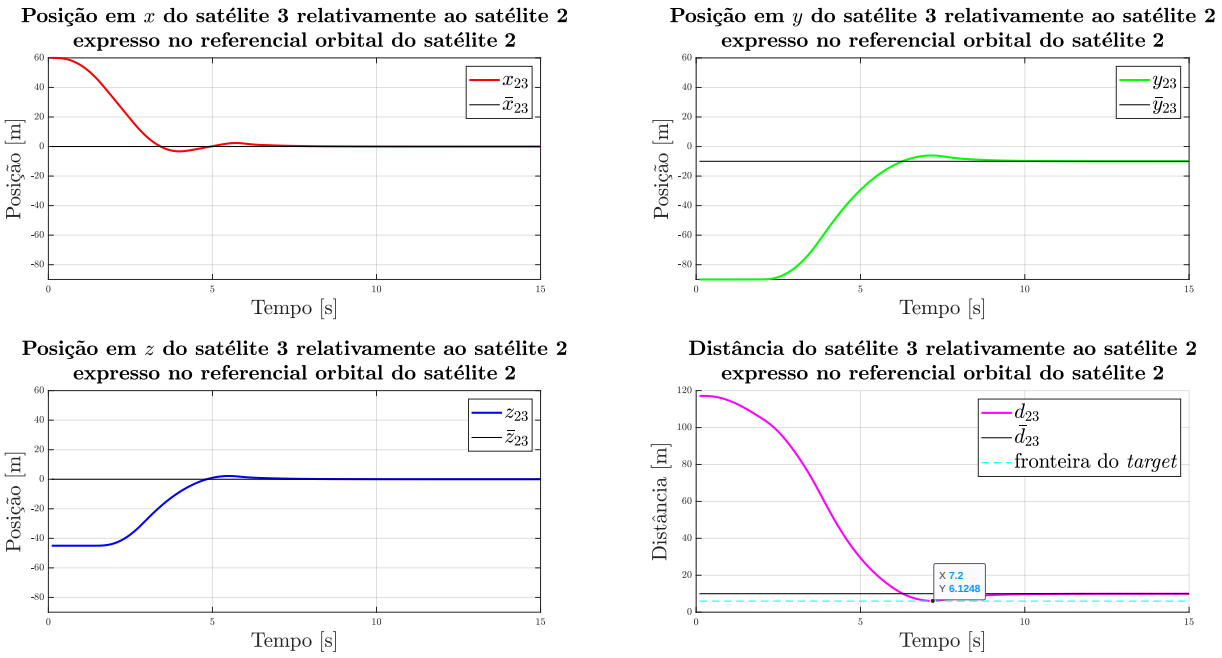




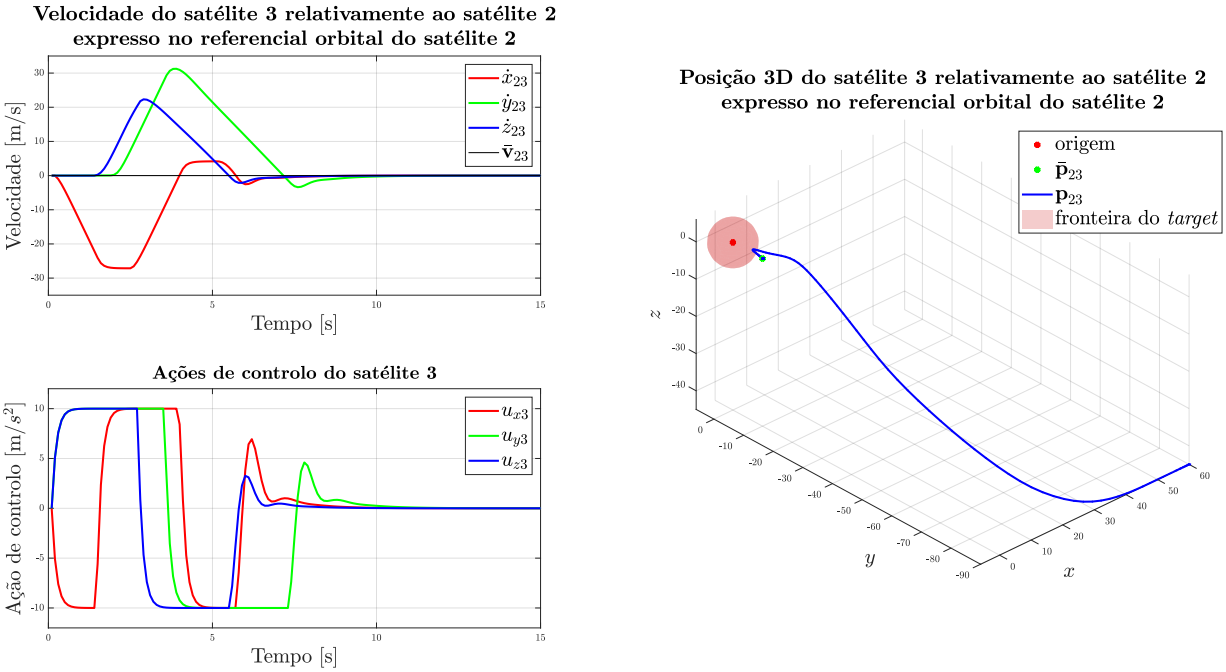


(b)

Figura 5.6: Resultados do 2º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 2



(a)



(b)

Figura 5.7: Resultados do 2º teste do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites, do agente 3

Como se pode observar pelas Figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7, em todas as situações a estratégia proposta consegue conduzir com sucesso os satélites para os valores desejados, respeitando ao mesmo tempo todas as restrições que foram impostas para cada teste com um comportamento que vai de acordo com as penalizações consideradas, apesar de haver situações em que oscilações indesejadas atrasam e arriscam a colisão dos satélites. Na Tabela 5.3 é possível ainda observar os resultados de cada teste tendo em conta três métodos de desempenho que são respetivamente a Raiz do Erro Quadrático Médio (*Root Mean Square Error*) (RMSE), a energia despendida média e o erro de saída final.

Tabela 5.3: Desempenho da simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites

Teste	**Agente**	$\sqrt{\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1}\|\|\mathbf{y}(k)-\bar{\mathbf{y}}(k)\|\|^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1}\|\|\mathbf{u}(k)\|\|^2}\ [\mathrm{m\,s^{-2}}]$	$\|\|\mathbf{y}(n_k)-\bar{\mathbf{y}}(n_k)\|\|$
1	1	24.817	5.427	3.133×10^{-4}
1	2	23.248	6.072	8.359×10^{-4}
2	1	10.276	5.500	6.754×10^{-5}
2	2	14.671	8.064	9.240×10^{-5}
2	3	50.068	10.660	2.763×10^{-3}

Analisando os resultados do primeiro teste para o primeiro agente, presentes na Figura 5.3, pode-se concluir que a posição converge continuamente sem oscilação e sem sobrelevação para a referência, respeitando também a restrição de desvio de obstáculos, uma vez que o obstáculo é o próprio *target*, que se encontra na origem do referencial.

Já para os resultados do primeiro teste com o segundo agente, presentes na Figura 5.4, pode-se concluir que a posição converge sem oscilação e sem sobrelevação para a referência, mas mantendo inicialmente uma posição relativa constante em x e em y que atrasa a convergência para a posição relativa pretendida. Influenciando também a velocidade relativa e a ação de controlo.

No primeiro agente do segundo teste pode-se observar uma convergência para a posição desejada sem problemas. No entanto, os resultados do segundo agente no segundo teste, presentes na Figura 5.6, já indicam uma posição relativa constante nos primeiros instantes de tempo que depois tende para zero, mas que em x apresenta um nível de sobrelevação razoável que atrasa a convergência para a posição desejada. Mas mesmo com esta sobrelevação, é satisfeita a restrição de desvio de obstáculos, como se pode observar na Figura 5.6 b) relativa à evolução da posição 3D.

Finalmente, pelos resultados do terceiro agente no segundo teste, presentes na Figura 5.7, pode-se observar que a restrição de desvio de obstáculos é aplicada para controlar a oscilação da posição relativa que apresenta sobrelevação em todos os componentes. Neste teste consegue-se observar a importância deste tipo de restrições para garantir a segurança dos satélites quando se está a realizar este tipo de manobras. Nesta situação, poderia ter-se considerado diferentes penalizações de maneira a evitar este tipo de oscilações.

6

MPC Distribuído para Pelotão de Múltiplos Satélites com Topologia de Rede

No Capítulo 5, foi proposta uma estratégia distribuída para um sistema de pelotão composto por múltiplos satélites, onde os diversos satélites seguidores convergem para a trajetória V-Bar do satélite líder com uma posição relativa constante entre todos os corpos, isto recorrendo ao Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC) linear. No entanto, esta estratégia assume uma topologia unidirecional em série que restringe a capacidade de comunicação e interação dos satélites.

Sendo assim, é revisto neste Capítulo o problema já apresentado anteriormente no Capítulo 5, ao propor uma segunda estratégia que permite considerar diferentes topologias de rede através de outra abordagem ao MPC distribuído.

Dada a necessidade de interação entre satélites para um problema de aproximação como o de pelotão, torna-se importar reforçar a componente cooperativa deste tipo de manobras. Existem diversas abordagens distribuídas a que se pode recorrer, mas os algoritmos baseados em consenso têm-se demonstrado ao longo do tempo como ferramentas de confiança para lidar com sistemas compostos por múltiplos agentes [101–103]. Sendo assim, é considerado o algoritmo de optimização local 1-hop, proposto em [104], como base para formular o novo método distribuído. O conceito de 1-hop refere-se à interação de um agente com todos os seus vizinhos que se encontram diretamente interligados, ou seja, para uma vizinhança de primeira ordem. Para além disso, de maneira a modelar as topologias de rede que vão ser incorporadas, recorre-se aos fundamentos da teoria de grafos para sistemas distribuídos e que se encontra detalhado em [105].

Apresenta-se assim a nova dinâmica do sistema a ser implementado, bem como o problema de optimização, o algoritmo distribuído a ser incorporado no MPC, as topologias de rede mais relevantes para este tipo de situações e os resultados obtidos para as diferentes topologias de rede testadas.

6.1 Dinâmica do Sistema

Considere-se um sistema composto por λ satélites seguidores ativos com massas m_f, $f = 1,...,\lambda$, tal que, cada satélite f quer seguir o satélite $f-1$ numa trajetória para Manter a Distância Orbital (*Orbital Station Keeping*) (OSK) em V-Bar com posição relativa constante, sendo 0 o satélite líder passivo e assumindo as mesmas condições da Secção 5.1.

Para a estratégia distribuída admite-se que os agentes conseguem trocar informação via uma topologia de comunicação dada pelo grafo direcionado conectado $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{I})$ onde $\mathcal{N} = \{1,...,\lambda\}$ é o conjunto de agentes que representam os vértices do grafo e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ é o conjunto de arestas que interligam os vértices. Grafo $\mathcal{G}$ onde todos os satélites seguidores estão interligados ao satélite líder, de maneira a ter um referencial orbital $\mathcal{F}^{lo}$ comum a todos os satélites.

O sistema de equações de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH) clássico para um satélite seguidor f relativamente ao satélite líder pode ser dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t) = \mathbf{A}'\mathbf{x}_f(t) + \mathbf{B}'\mathbf{u}_f(t) \tag{6.1}$$

onde $\mathbf{x}_f = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_f^T & \mathbf{v}_f^T\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de estado, $\mathbf{p}_f \in \mathbb{R}^3$ é a posição relativa expressa em $\mathcal{F}^{lo}$, $\mathbf{v}_f \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade relativa expressa em $\mathcal{F}^{lo}$, $\mathbf{u}_f \in \mathbb{R}^3$ é a ação de controlo do seguidor e

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

que, ao discretizar a expressão (6.1) pelo método de Retentor de Ordem Zero (*Zero-Order Hold*) (ZOH) obtém-se

$$\mathbf{x}_f^+ = \mathbf{A}\mathbf{x}_f + \mathbf{B}\mathbf{u}_f \tag{6.3}$$

sendo n a taxa orbital do líder.

Para estudar o problema de sincronização é definido um erro de seguimento de vizinhança para cada satélite seguidor f, dado por

$$\mathcal{E}_f = \sum_{i \in \mathcal{N}_f} (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i) + g^f \mathbf{x}_f \tag{6.4}$$

e a partir das expressões (6.3) e (6.4) uma dinâmica de erro pode ser definida por

$$\mathcal{E}_f^+ = \mathbf{A}\mathcal{E}_f + (g^f + d^f)\mathbf{B}\mathbf{u}_f - \mathbf{B}\sum_{i \in \mathcal{N}_f} \mathbf{u}_i \tag{6.5}$$

onde $\mathcal{N}_f \subset \mathcal{N}$ é o conjunto de vizinhos do agente f, $d^f = \left\|\mathcal{N}_f\right\|$ é o seu grau, $g^f = 1$ se o agente f tem acesso ao estado do líder ou $g^f = 0$ se não tiver acesso.

Através do grafo $\mathcal{G}$ pode ser definido uma matriz Laplaciana aumentada $\bar{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\lambda}$ dada por

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{G} + \mathbf{D} - \mathbf{A}_d \tag{6.6}$$

onde $\mathbf{G} = \text{diag}(g^1, \cdots, g^\lambda) \in \mathbb{R}^{\lambda\times\lambda}$ é a matriz que representa o acesso ao líder e $\mathbf{D} = \text{diag}(d^1, \cdots, d^\lambda) \in \mathbb{R}^{\lambda\times\lambda}$ é a matriz de grau. Ainda existe a matriz de adjacência $\mathbf{A}_d = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{\lambda\times\lambda}$ que descreve a comunicação entre os vários satélites seguidores, com cada entrada expressa por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq i \text{ e } \{j,i\} \in \mathcal{I} \\ 0, & \text{se não} \end{cases} \tag{6.7}$$

sendo que $\{j,i\} \in \mathcal{I}$ significa que existe uma aresta direcionada que vai do vértice j para o vértice i ($j \to i$).

6.2 Problema de Controlo Óptimo

Para cada agente $f \in \mathcal{N}$ pretende-se determinar a sequência de controlo óptima $\mathbf{U}_f^*$ que resolve o problema de optimização local 1-hop, dado por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}_f} \quad & \mathbf{V}_f(\mathbf{U}_f; \mathcal{E}_f, \mathbf{U}_{-f_1}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{expressão (6.5)}, \quad \forall_{k=0,\dots,N-1}, \\ & \mathcal{E}_f \in \mathcal{X}_f, \quad \forall_{k=0,\dots,N}, \\ & \mathbf{u}_f \in \mathcal{U}_f, \quad \forall_{k=0,\dots,N-1} \end{aligned} \tag{6.8}$$

sendo que

$$\mathbf{V}_f(\mathbf{U}_f; \mathcal{E}_f, \mathbf{U}_{-f_1}) = \alpha_f \left[\sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{\mathcal{E}}_f^T \mathbf{Q} \hat{\mathcal{E}}_f + \mathbf{u}_f^T \mathbf{W} \mathbf{u}_f \right) + \hat{\mathcal{E}}_f^T(N) \mathbf{P} \hat{\mathcal{E}}_f(N) \right] \tag{6.9}$$

com

$$\hat{\mathcal{E}}_f = \mathcal{E}_f - (g^f + d^f)\mathcal{E}_d \tag{6.10}$$

e onde N é o horizonte de controlo, α é o peso da função de custo, $\mathcal{E}_d \in \mathbb{R}^6$ é o erro de seguimento desejado, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6\times6}$ a penalização sobre o desvio final, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{6\times6}$ a penalização sobre o desvio em relação à referência e $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a penalização sobre a ação de controlo, penalizações que são positivas definidas. Tem-se ainda o conjunto de restrições lineares para as variáveis de estado $\mathcal{X}$ e o conjunto de restrições lineares para as variáveis de controlo $\mathcal{U}$.

Para o problema de optimização considera-se $\mathbf{U}_f$ como a variável de optimização para o problema local, mas a solução depende do erro de seguimento local $\mathcal{E}_f$ e da sequência $\mathbf{U}_{-f_1}$ que está associada à ação de controlo dos vizinhos 1-hop do agente f.

Passando para o formato de *batch*, a dinâmica do modelo de cada agente $f \in \mathcal{N}$ (6.5) pode ser reescrita como

$$\mathcal{E}_f^{+:N} = \mathcal{A}\mathcal{E}_f + (g^f + d^f)\mathcal{B}\mathbf{U}_f - \mathcal{B} \sum_{i \in \mathcal{N}_f} \mathbf{U}_i \tag{6.11}$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

tal como a função de custo, ficando

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_f(\mathbf{U}_f; \mathcal{E}_f, \mathbf{U}_{-f_1}) = & \left[\mathcal{E}_f^{+:N} - (g^f + d^f)\bar{\mathcal{E}}_d \right]^T \mathcal{Q} \left[\mathcal{E}_f^{+:N} - (g^f + d^f)\bar{\mathcal{E}}_d \right] + \mathbf{U}_f^T \mathcal{W} \mathbf{U}_f + \\ & \left[\mathcal{E}_f - (g^f + d^f)\mathcal{E}_d \right]^T \alpha_f \mathbf{Q} \left[\mathcal{E}_f - (g^f + d^f)\mathcal{E}_d \right] \end{aligned} \tag{6.13}$$

onde

- $\mathcal{Q} = \alpha_f \, \text{diag}(\mathbf{Q}, \cdots, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \in \mathbb{R}^{6N \times 6N}$;
- $\mathcal{W} = \alpha_f \, \text{diag}(\mathbf{W}, \mathbf{W}, \cdots, \mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$;
- $\bar{\mathcal{E}}_d = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \cdots & \mathcal{E}_d^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6N}$.

Ao incorporar a dinâmica (6.11) na função de custo (6.13) obtém-se

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_f(\mathbf{U}_f; \mathcal{E}_f, \mathbf{U}_{-f_1}) = \\
&\mathcal{E}_f^T(\mathcal{A}^T\mathcal{Q}\mathcal{A} + \alpha_f\mathbf{Q})\mathcal{E}_f + 2(g^f + d^f)\mathcal{E}_f^T(\mathcal{A}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\mathbf{U}_f - 2\mathcal{E}_f^T(\mathcal{A}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\mathbf{U}_i + \\
&\mathbf{U}_f^T\left[(g^f + d^f)^2(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathcal{W}\right]\mathbf{U}_f - 2(g^f + d^f)\left(\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\mathbf{U}_i\right)^T(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\mathbf{U}_f + \\
&\left(\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\mathbf{U}_i\right)^T(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\mathbf{U}_i - 2(g^f + d^f)\mathcal{E}_f^T(\mathcal{A}^T\mathcal{Q})\bar{\mathcal{E}}_d - \\
&2(g^f + d^f)^2\mathbf{U}_f^T(\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\bar{\mathcal{E}}_d + 2(g^f + d^f)\left(\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\mathbf{U}_i\right)^T(\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\bar{\mathcal{E}}_d + \\
&(g^f + d^f)^2\bar{\mathcal{E}}_d^T(\mathcal{Q})\bar{\mathcal{E}}_d - 2\alpha_f(g^f + d^f)\mathcal{E}_f^T(\mathbf{Q})\mathcal{E}_d + \alpha_f(g^f + d^f)^2\mathcal{E}_d^T(\mathbf{Q})\mathcal{E}_d
\end{aligned} \tag{6.14}$$

e uma vez que a condição de estacionaridade é dada por

$$\nabla_{\mathbf{U}_f}\,\mathbf{V}_f\left(\mathbf{U}_f; \mathcal{E}_f, \mathbf{U}_{-f_1}\right)\Big|_{\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_f^*} = \mathbf{0} \tag{6.15}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
&\left[(g^f + d^f)^2(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathcal{W}\right]\mathbf{U}_f^* - (g^f + d^f)(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\mathbf{U}_i + (g^f + d^f)(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{A})\mathcal{E}_f - \\
&(g^f + d^f)^2(\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\bar{\mathcal{E}}_d = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

que ao passar para todos os agentes do sistema, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
&\left[\left((\mathbf{G} + \mathbf{D})\bar{\mathbf{L}}\right) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right]\mathbf{U}^* + \left[(\mathbf{G} + \mathbf{D}) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{A})\right]\mathcal{E} - \\
&\left[(\mathbf{G} + \mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\right](\bar{\mathcal{E}}_d)_{\times\lambda} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

e que permite obter a sequência de ação de controlo óptima

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^* = &\left[\left((\mathbf{G} + \mathbf{D})\bar{\mathbf{L}}\right) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right]^{-1} \times \\
&\left[-\left((\mathbf{G} + \mathbf{D}) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{A})\right)\mathcal{E} + \left((\mathbf{G} + \mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\right)(\bar{\mathcal{E}}_d)_{\times\lambda}\right]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

sem ter em conta as restrições. O operador $\otimes$ refere-se ao produto de Kronecker, que é uma operação entre duas matrizes de tamanho arbitrário que resulta numa matriz por blocos, tal que, se $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4}$, então $\mathbf{N} \otimes \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(n_1 n_3) \times (n_2 n_4)}$.

Apresenta-se de seguida um conjunto de definições, propriedades e teoremas que vão ser necessários para provar a unicidade de $\mathbf{U}^*$.

Definition 6.1. *A matriz real simétrica* $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ *é*

- *positiva definida, ou* $\boldsymbol{N} > 0$, *se* $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{N}\boldsymbol{e} > 0$ *para todo o* $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{n_0} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$;
- *positiva semi-definida, ou* $\boldsymbol{N} \geq 0$, *se* $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{N}\boldsymbol{e} \geq 0$ *para todo o* $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{n_0}$.

Propriedades da Definição 6.1:

6.1.1. $\mathbf{N}$ é positiva definida sse todos os seus valores próprios forem positivos. Da mesma forma, $\mathbf{N}$ é positiva semi-definida sse todos os seus valores próprios não forem negativos.

6.1.2. Uma matriz diagonal é positiva definida sse todos os elementos da diagonal principal forem positivos.

6.1.3. Toda a matriz positiva definida é invertível e a sua inversa também é positiva definida.

6.1.4. Considere-se a matriz positiva definida $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ e a matriz positiva semi-definida $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$. Então $\mathbf{N} + \mathbf{H}$ é positiva definida.

6.1.5. Considerem-se as matrizes positivas definidas $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m_0 \times m_0}$. Então $\mathbf{N} \otimes \mathbf{H}$ é positiva definida.

6.1.6. Se uma matriz é positiva definida, então essa matriz ao quadrado também é positiva definida.

6.1.7. Uma matriz real $\mathbf{H}$ é positiva definida sse a parte simétrica de $\mathbf{H}$ for positiva definida, ou seja, se $\mathbf{H}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$ for positiva definida [106].

Pode-se encontrar informação adicional das propriedades da Definição 6.1 e das respetivas demonstrações em [107–110].

Theorem 6.2. *Considere-se um grafo* $\mathcal{G}$ *e a correspondente matriz Laplaciana* $\boldsymbol{L}$, *dada por*

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}_d. \tag{6.19}$$

Então, $\boldsymbol{L}$ *é positiva semi-definida.*

Demonstração. Para qualquer $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n_0}$, a matriz Laplaciana está no formato quadrático, mais especificamente

$$\mathbf{e}^T \mathbf{L}\mathbf{e} = \mathbf{e}^T \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} \mathbf{L}_{i,j} \right) \mathbf{e} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} \mathbf{e}^T \mathbf{L}_{i,j}\mathbf{e} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^2 \geq 0 \tag{6.20}$$

logo, segundo a Definição 6.1, $\mathbf{L} \succeq 0$. ■

Theorem 6.3. *Considere-se um grafo* $\mathcal{G}$ *e a correspondente matriz Laplaciana aumentada* $\bar{\boldsymbol{L}}$, *dada por*

$$\bar{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{L}. \tag{6.21}$$

Então, $\bar{\boldsymbol{L}}$ *é positiva definida.*

Demonstração. Uma vez que todos os satélites seguidores estão interligados ao satélite líder, a matriz $\mathbf{G}$ vai ter sempre elementos positivos na sua diagonal, que pela propriedade 6.1.2. pode-se concluir que $\mathbf{G}$ é positiva definida. Por outro lado, no Teorema 6.2 chegou-se à conclusão que $\mathbf{L}$ é positiva semi-definida, logo, aplicando a propriedade 6.1.4. para $\mathbf{G}+\mathbf{L}$, conclui-se que $\bar{\mathbf{L}} > 0$. ■

Proposition 6.4. *A sequência de ação de controlo óptima $\mathbf{U}^*$ é um mínimo global único, uma vez que*

$$\left[\left((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{D})\bar{\boldsymbol{L}}\right)\otimes(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})+\boldsymbol{I}_\lambda\otimes\mathcal{W}\right] \tag{6.22}$$

é positiva definida e por sua vez invertível.

Demonstração. Considerando que $\boldsymbol{v}$ e φ correspondem respetivamente a um vetor e valor próprio de $(\mathbf{G}+\mathbf{D})\bar{\mathbf{L}}$, então

$$(\mathbf{G}+\mathbf{D})\bar{\mathbf{L}}\boldsymbol{v}=\varphi\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\bar{\mathbf{L}}\boldsymbol{v}=\varphi(\mathbf{G}+\mathbf{D})^{-1}\boldsymbol{v}\Rightarrow\frac{\boldsymbol{v}^T\bar{\mathbf{L}}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T(\mathbf{G}+\mathbf{D})^{-1}\boldsymbol{v}}=\varphi. \tag{6.23}$$

Adicionalmente, pelo Teorema 6.3 e pela propriedade 6.1.3. sabe-se que $\bar{\mathbf{L}}$ e $(\mathbf{G}+\mathbf{D})^{-1}$ são ambos positivos definidos. Deste modo, através da Definição 6.1 pode-se dizer que

$$\boldsymbol{v}^T\bar{\mathbf{L}}\boldsymbol{v}>0,\quad \boldsymbol{v}^T(\mathbf{G}+\mathbf{D})^{-1}\boldsymbol{v}>0 \tag{6.24}$$

sendo então o valor próprio $\varphi > 0$, que através da propriedade 6.1.1. prova que $(\mathbf{G}+\mathbf{D})\bar{\mathbf{L}}$ é positiva definida. Para $\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{G}+\mathbf{D})$ o resultado é o mesmo.

Sabendo que as penalizações da função de custo são consideradas como positivas definidas e tendo em conta a propriedade 6.1.5., pode-se concluir que $(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) > 0$ e que $(\mathbf{I}_\lambda\otimes\mathcal{W}) > 0$, logo a expressão (6.22) é também positiva definida, o que prova a unicidade de $\mathbf{U}^*$. De notar que se desprezam as restrições neste caso.

■

No que respeita a restrições, foram incluídas restrições de ação de controlo e restrições de velocidade, expressas respetivamente por

$$\mathbf{u}_{min}\leq\mathbf{u}_f\leq\mathbf{u}_{max}, \tag{6.25}$$

$$(g^f+d^f)\mathbf{v}_{min}\leq\mathbf{v}_f\leq(g^f+d^f)\mathbf{v}_{max} \tag{6.26}$$

e ainda restrições para os valores mínimos de erro de seguimento

$$\left\|\mathcal{E}_f\right\|^2\geq((g^f+d^f)r_f)^2 \tag{6.27}$$

onde r_f é o raio da esfera que representa o satélite seguidor. Restrições que em notação de *batch* podem ser dadas por

$$\mathbf{M}_f\mathbf{U}_f\leq\mathbf{w}_f\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{f,u}\\ \mathbf{M}_{f,v}\\ \mathbf{M}_{f,obs}\end{bmatrix}\mathbf{U}_f\leq\begin{bmatrix}\mathbf{w}_{f,u}\\ \mathbf{w}_{f,v}\\ \mathbf{w}_{f,obs}\end{bmatrix} \tag{6.28}$$

e que são deduzidas da mesma forma que as restrições apresentadas na Secção 4.3.

6.3 Algoritmo Distribuído

Nesta Secção é apresentado o algoritmo distribuído que vai ser iterado e que vai substituir o algoritmo de passo convexo que foi apresentado no Capítulo 5.

Esta nova abordagem cooperativa tem como base um algoritmo distribuído de comunicação para vizinhos 1-hop, que permite encontrar iterativamente a solução de (6.8). Em cada instante de tempo, cada agente f determina a sua solução e partilha várias vezes essa mesma solução com seus vizinhos até convergir para uma sequência de ação de controlo óptima, do qual é utilizado apenas o seu primeiro valor. Seguidamente, o algoritmo é processado para o próximo instante de tempo.

Tome-se $\hat{\mathbf{U}}_f(\gamma)$ como a estimativa de $\mathbf{U}_f^*$ para a iteração γ, no algoritmo 1.

Algoritmo 1: Optimização distribuída 1-hop para o agente $f \in \mathcal{N}$ no instante de tempo k

Entrada: tolerância $\sigma > 0$ e estado local $\mathcal{E}_f$

Saída: sequência de ação de controlo óptima $\hat{\mathbf{U}}_f(\gamma)$

início
  $\gamma \leftarrow 0$
  se $(k = 0)$ **então**
    $\hat{\mathbf{U}}_f(0) \leftarrow$ valor aleatório
  senão
    $\hat{\mathbf{U}}_f(0) \leftarrow \mathbf{U}_f^*(k-1)$
  fim
  repita
    transmitir $\hat{\mathbf{U}}_f(\gamma)$ para os vizinhos
    $\hat{\mathbf{U}}_f(\gamma+1) \leftarrow \underset{\mathbf{U}_f}{\operatorname{argmin}} \mathbf{V}_f\left(\mathbf{U}_f; \mathcal{E}_f, \hat{\mathbf{U}}_{-f_1}(\gamma)\right)$ sujeito à dinâmica (6.5)
    $erro \leftarrow \|\hat{\mathbf{U}}_f(\gamma+1) - \hat{\mathbf{U}}_f(\gamma)\|$
    $\gamma \leftarrow \gamma + 1$
  até $(erro \leq \sigma)$
  retorna $\hat{\boldsymbol{U}}_f(\gamma)$
fim

A cada iteração do algoritmo 1, a seguinte expressão é satisfeita

$$\begin{aligned}&\left[(g^f + d^f)^2(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathcal{W}\right]\hat{\mathbf{U}}_f(\gamma+1) - (g^f + d^f)(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\sum_{i\in\mathcal{N}_f}\hat{\mathbf{U}}_i(\gamma) + \\ &(g^f + d^f)(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{A})\mathcal{E}_f - (g^f + d^f)^2(\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\bar{\mathcal{E}}_d = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{6.29}$$

que ao considerar todos os agentes é dada por

$$\begin{aligned}&\left[(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right]\hat{\mathbf{U}}(\gamma+1) - \left[((\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right]\hat{\mathbf{U}}(\gamma) + \\ &\left[(\mathbf{G}+\mathbf{D}) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{A})\right]\mathcal{E} - \left[(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q})\right](\bar{\mathcal{E}}_d)_{\times\lambda} = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Proposition 6.5. *Considerando as iterações da expressão (6.30) no algoritmo 1, a estimativa do controlo óptimo $\hat{\mathbf{U}}$ converge para (6.18).*

Demonstração. A expressão (6.30) pode ser reescrita como um sistema discreto dado por

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(\gamma+1) - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}}(\gamma) - \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \tag{6.31}$$

em que $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{n_0}$ e $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$. Considerando que $\boldsymbol{v}$ e φ correspondem respetivamente a um vetor e valor próprio de $(\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}})$, então

$$(\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}})\boldsymbol{v} = \varphi\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{v} = \varphi\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{v}^T\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{v}} = \varphi \Rightarrow \frac{\boldsymbol{v}^T(\bar{\mathbf{B}}+\bar{\mathbf{B}}^T)\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T 2\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{v}} = \varphi. \tag{6.32}$$

De maneira a ter um sistema assintoticamente estável, tal que o estado convirja assintoticamente para $\bar{\mathbf{x}}^* := (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}})^{-1}\bar{\mathbf{c}}$, é preciso que $|\varphi| < 1$. Sendo assim, a partir da expressão (6.32), da Definição 6.1 e da propriedade 6.1.7. chega-se à conclusão que, para o sistema ser sistema assintoticamente estável, é preciso que $\bar{\mathbf{A}} \succ 0$ e $2\bar{\mathbf{A}} \pm (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T) \succ 0$.

Sabendo que

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right] \tag{6.33}$$

e

$$\bar{\mathbf{B}} = \left[((\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right] \tag{6.34}$$

pode concluir-se que $\bar{\mathbf{A}}$ é positiva definida, pela propriedade 6.1.6. que prova $(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \succ 0$ e relembrando a Proposição 6.4, onde se demonstra que $(\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) \succ 0$ e $(\mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}) \succ 0$. Relativamente à condição $2\bar{\mathbf{A}} \pm (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T) \succ 0$,

$$\begin{aligned} 2\bar{\mathbf{A}} - (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T) =& 2\left[(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right] - \\ & \left[((\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right] - \left[((\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right]^T = \\ & 2\left[(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right] - \\ & \left[(\mathbf{A}_d(\mathbf{G}+\mathbf{D}) + (\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right) = \\ & \left[\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{G}+\mathbf{D}) + (\mathbf{G}+\mathbf{D})\bar{\mathbf{L}}\right] \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + 2\mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W} \succ 0 \end{aligned} \tag{6.35}$$

uma vez que na Proposição 6.4 se provou que $\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{G}+\mathbf{D}) \succ 0$ e $(\mathbf{G}+\mathbf{D})\bar{\mathbf{L}} \succ 0$. E ainda

$$\begin{aligned} 2\bar{\mathbf{A}} + (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T) =& 2\left[(\mathbf{G}+\mathbf{D})^2 \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + \mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W}\right] + \\ & \left[((\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right] + \left[((\mathbf{G}+\mathbf{D})\mathbf{A}_d) \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B})\right]^T = \\ & [(\mathbf{G}+\mathbf{D}+\mathbf{A}_d)(\mathbf{G}+\mathbf{D}) + (\mathbf{G}+\mathbf{D})(\mathbf{G}+\mathbf{D}+\mathbf{A}_d)] \otimes (\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}) + 2\mathbf{I}_\lambda \otimes \mathcal{W} \succ 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

uma vez que, ao definir uma matriz Laplaciana sem sinal dada por $\mathbf{L}_s = \mathbf{D} + \mathbf{A}_d$ que é positiva semi-definida [111], a partir do Teorema 6.3 e da Proposição 6.4 é possível deduzir que $(\mathbf{G}+\mathbf{D}+\mathbf{A}_d)(\mathbf{G}+\mathbf{D}) = (\mathbf{G}+\mathbf{L}_s)(\mathbf{G}+\mathbf{D}) \succ 0$ e $(\mathbf{G}+\mathbf{D})(\mathbf{G}+\mathbf{L}_s) \succ 0$. Sendo assim, conclui-se que o sistema em (6.30) é assintoticamente estável e converge para (6.18), se forem desprezadas as restrições. ■

6.4 Topologias de Rede

Existem diversas configurações que podem ser consideradas para a topologia de rede de um sistema composto por múltiplos agentes, dependendo da dinâmica, do seu objetivo, do nível de cooperação e das limitações existentes. Demonstram-se de seguida alguns exemplos relevantes de topologias de rede para o cenário de pelotão, que vão ser comparadas e analisadas mais tarde num ambiente de simulação. Topologias representadas na Figura 6.1.

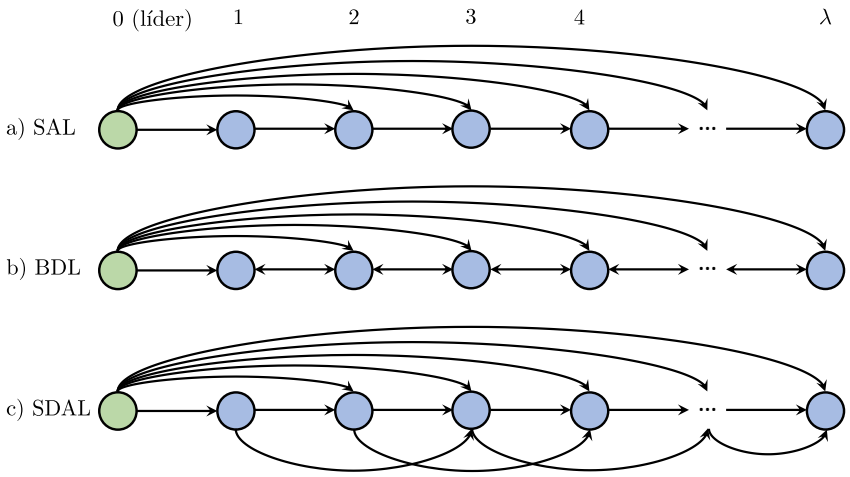


Figura 6.1: Exemplos de topologias para formação líder-seguidor num cenário de pelotão, adaptado de [78]. a) seguimento do antecessor com líder (SAL), b) bidirecional com líder (BDL), c) seguimento de dois antecessores com líder (SDAL)

A topologia do Seguimento do Antecessor com Líder (SAL), representada na Figura 6.1 a), é uma topologia unidirecional onde cada agente recebe informação do seu agente antecessor e também do líder. Seguindo a teoria dos grafos esta topologia é dada pelas matrizes

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{I}_\lambda. \tag{6.37}$$

A topologia Bidirecional com Líder (BDL), representada na Figura 6.1 b), é uma topologia onde cada agente recebe informação do seu agente antecessor, do seu agente sucessor e também do líder. Seguindo a teoria dos grafos esta topologia é dada pelas matrizes

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{I}_\lambda. \tag{6.38}$$

A topologia do Seguimento de Dois Antecessores com Líder (SDAL), representada na Figura 6.1 c), é uma topologia unidirecional onde cada agente recebe informação dos seus dois agentes antecessores e também do líder. Seguindo a teoria dos grafos esta topologia é dada pelas matrizes

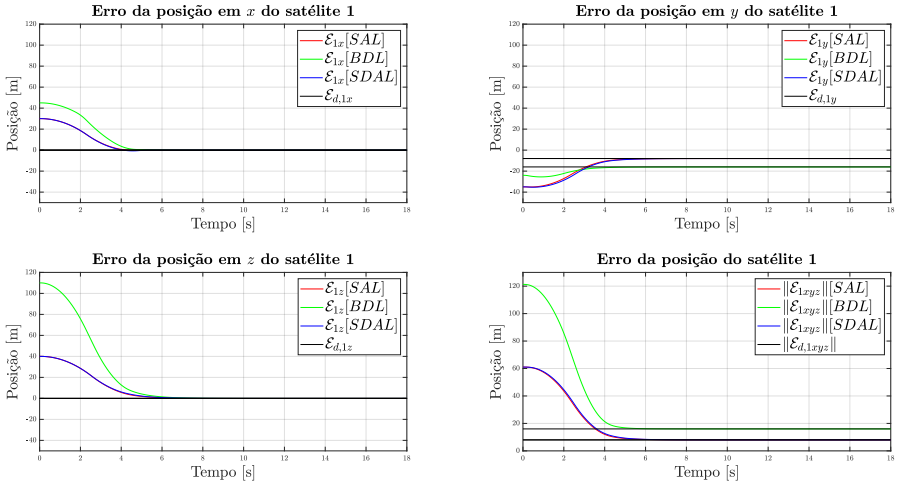
$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{I}_\lambda. \tag{6.39}$$

6.5 Simulação e Resultados

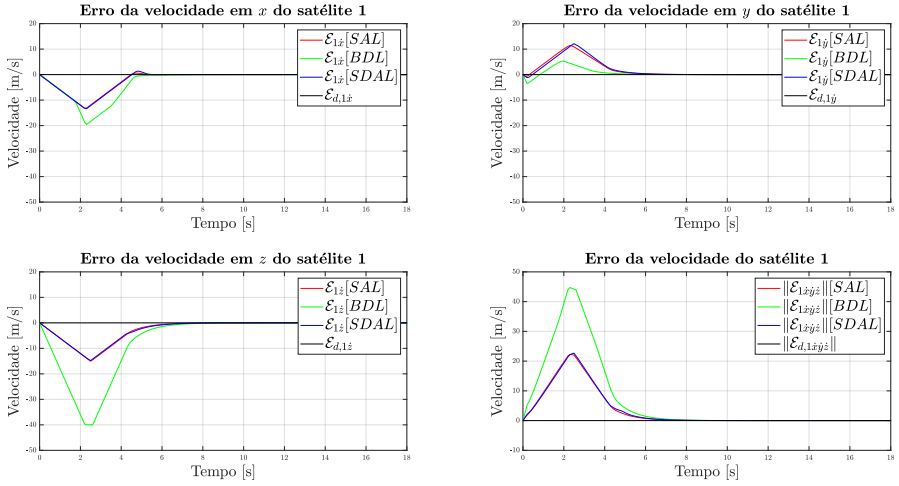
Para simular o MPC proposto neste Capítulo recorre-se à plataforma MATLAB ® R2019A com o auxílio da biblioteca CasADi [112] para resolver o problema de optimização, simulando a mesma dinâmica que foi usada para formular este MPC e desprezando o uso de ruído ou sensores. Para demonstrar as capacidades do MPC que foi formulado simula-se uma situação de teste para cada uma das topologias apresentadas, nomeadamente SAL, BDL e SDAL, com os parâmetros de simulação presentes na Tabela 6.1 e considerando um sistema composto por quatro satélites seguidores. Os resultados encontram-se nas Figuras 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5.

Tabela 6.1: Parâmetros de simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites com topologia de rede

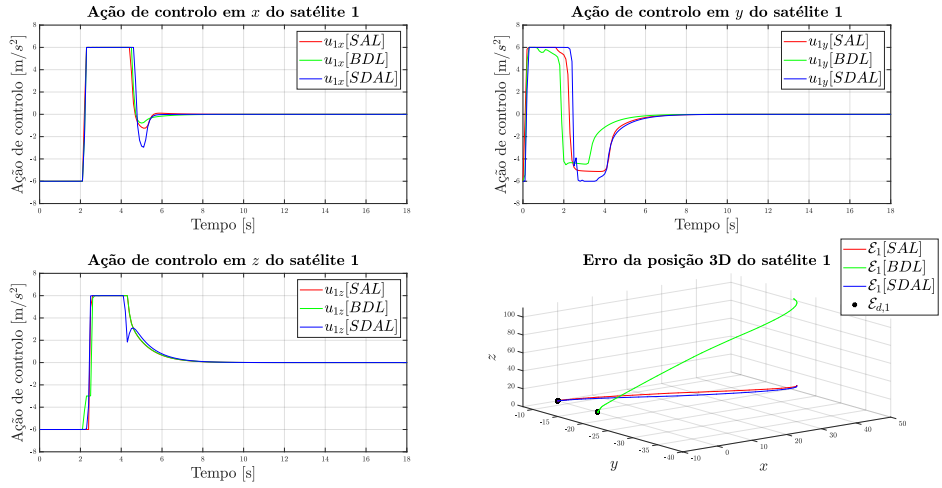
Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
condições ambientais			
parâmetro gravitacional da Terra	μ	$3.986\,004\,41 \times 10^{14}$	$\mathrm{m^3\,s^{-2}}$
condições do satélite			
raio orbital do líder	r_0	6621000	m
condições iniciais			
posição inicial do seguidor 1	$\mathbf{p}_1(0)$	$\begin{bmatrix}30 & -35 & 40\end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do seguidor 2	$\mathbf{p}_2(0)$	$\begin{bmatrix}15 & -46 & -30\end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do seguidor 3	$\mathbf{p}_3(0)$	$\begin{bmatrix}-49 & -43 & -20\end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do seguidor 4	$\mathbf{p}_4(0)$	$\begin{bmatrix}-29 & -23 & 37\end{bmatrix}^T$	m
velocidade inicial de f	$\mathbf{v}_f(0)$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
referências			
erro de seguimento desejado	$\mathcal{E}_d$	$\begin{bmatrix}0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$	
configuração do MPC			
tempo de amostragem	T_s	0.1	s
número de iterações	n_k	180	
horizonte temporal	N	30	
penalização sobre o desvio final	$\mathbf{P}$	$25\mathbf{I}_6$	
penalização sobre o desvio	$\mathbf{Q}$	$13\mathbf{I}_6$	
penalização de controlo	$\mathbf{W}$	$0.1\mathbf{I}_3$	
tolerância do algoritmo 1-hop	σ	0.5	
peso da função de custo	$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]$	$\begin{bmatrix}2 & 1.5 & 1 & 1\end{bmatrix}$	
restrições			
ação de controlo máxima	$\mathbf{u}_{max}$	6	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
velocidade máxima	$\mathbf{v}_{max}$	20	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
raio do satélite f	r_f	3	m



(a)

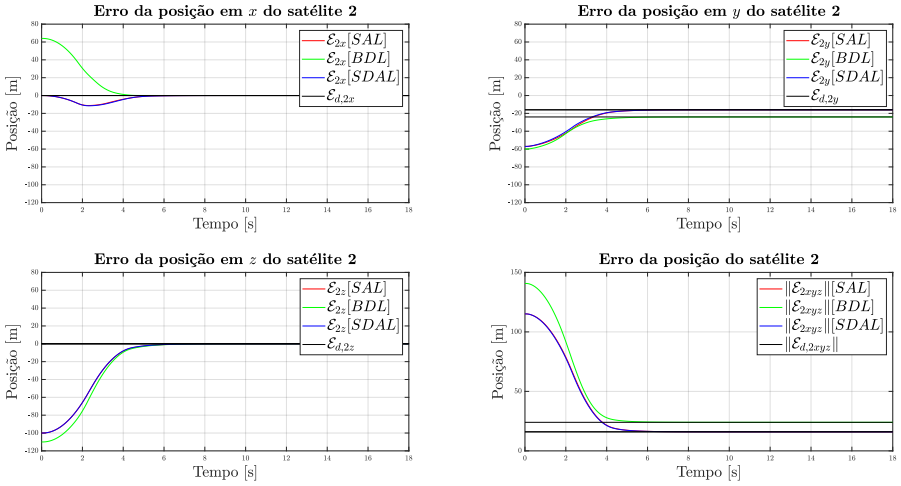


(b)

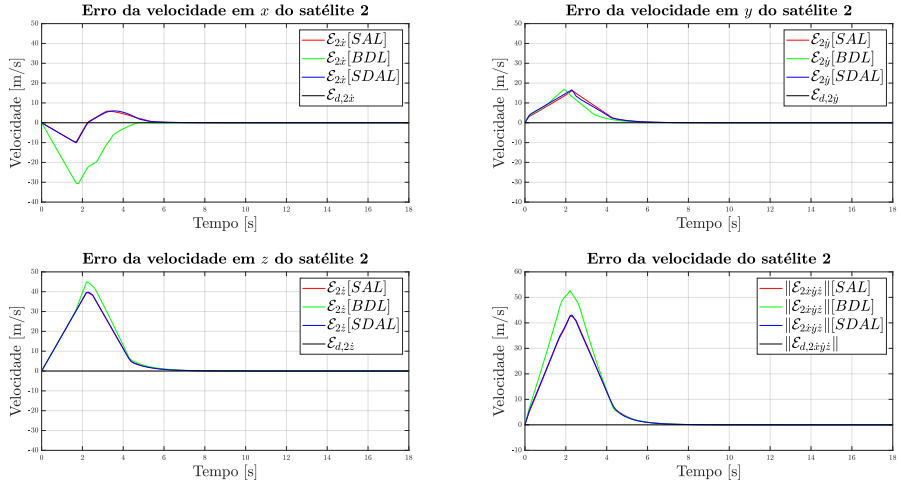


(c)

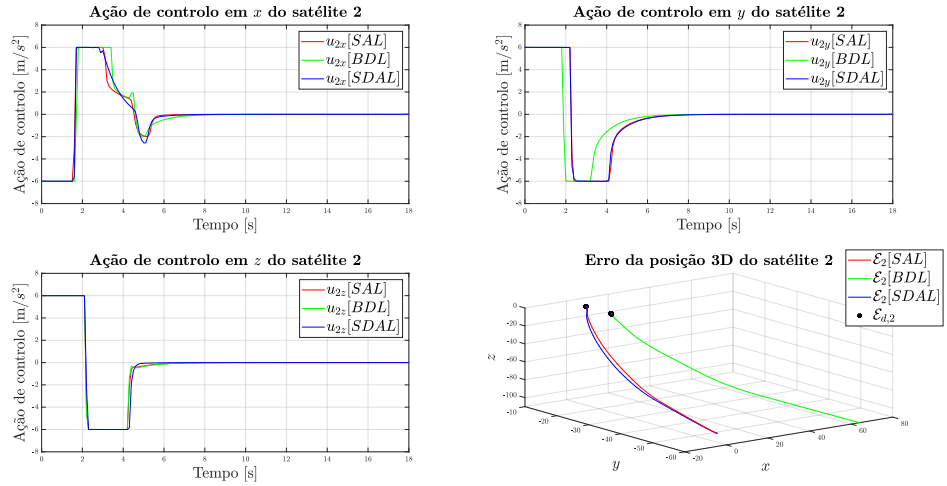
Figura 6.2: Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 1



(a)

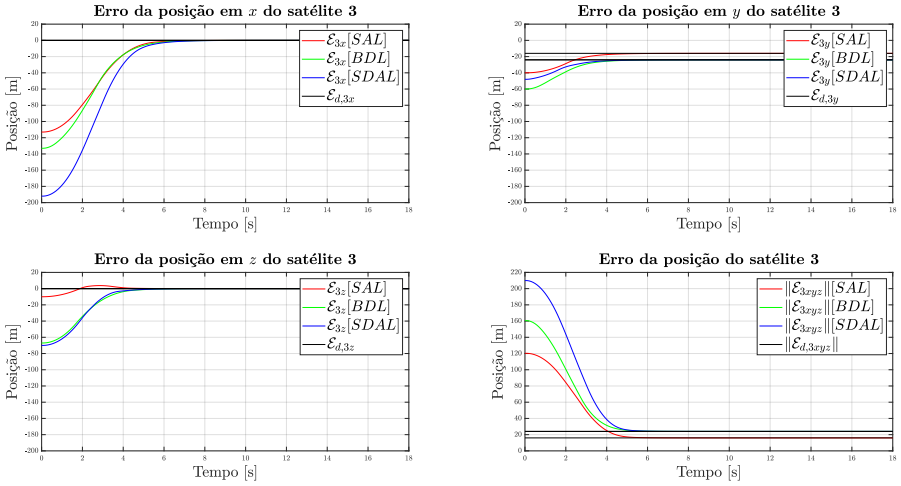


(b)

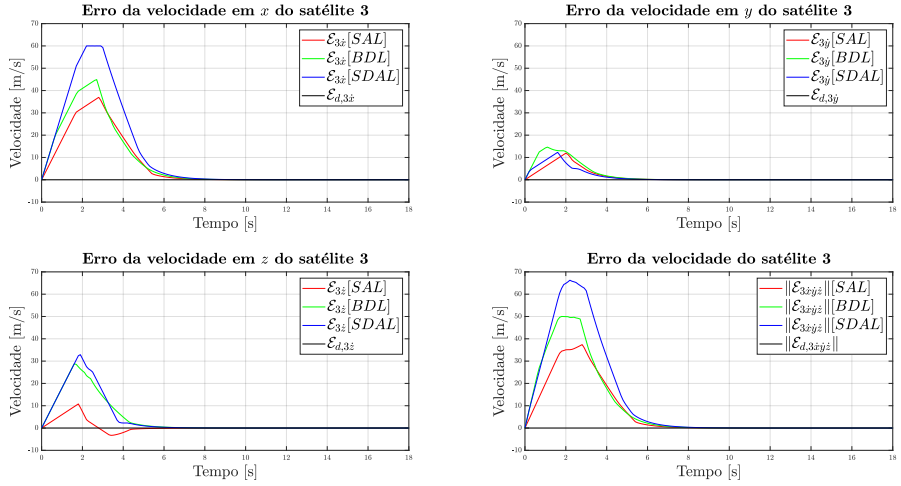


(c)

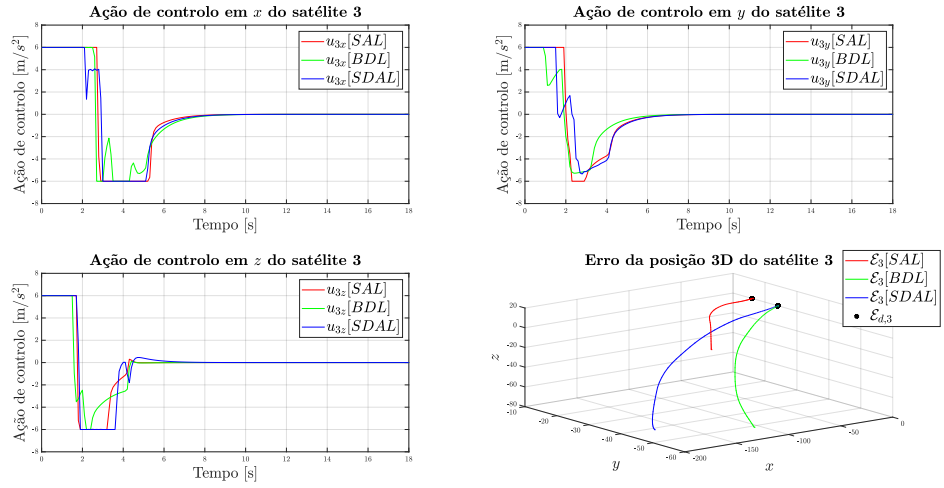
Figura 6.3: Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 2



(a)

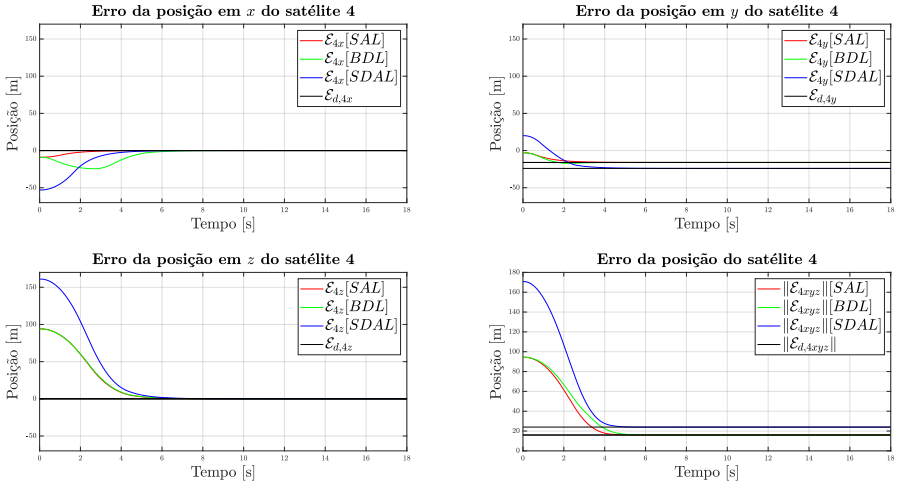


(b)

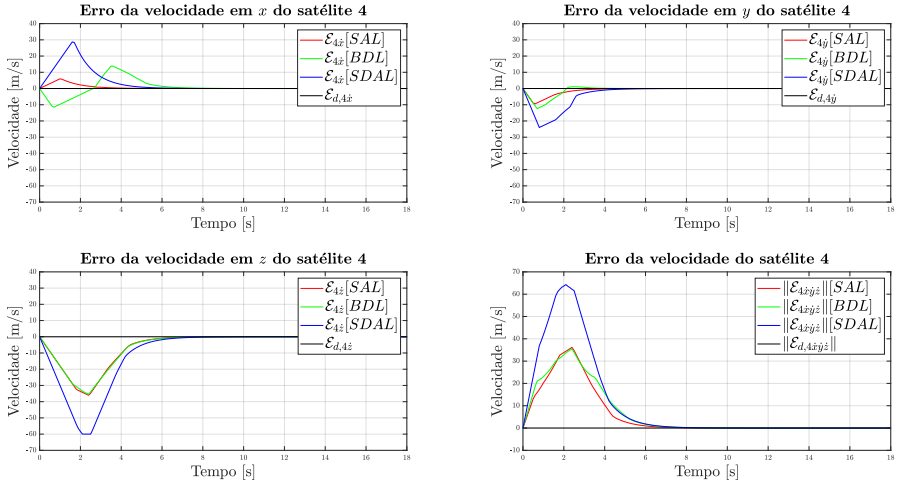


(c)

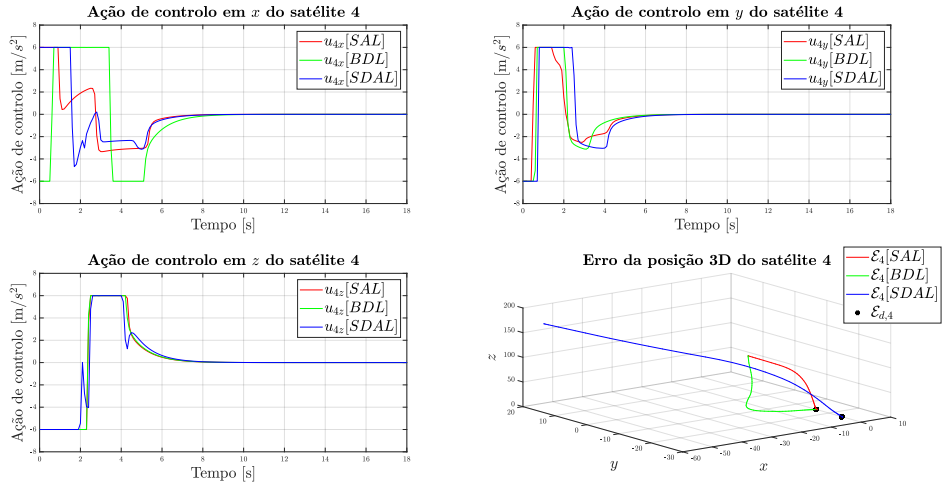
Figura 6.4: Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 3



(a)



(b)



(c)

Figura 6.5: Resultados do MPC distribuído para o pelotão com topologia de rede, do satélite 4

Como se pode observar pelas Figuras 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5, em todas as situações a estratégia proposta consegue convergir com sucesso o erro para os valores desejados, respeitando ao mesmo tempo todas as restrições que foram impostas para cada topologia e com um comportamento que vai de acordo com as penalizações consideradas.

Uma vez que foi testado os quatro satélites para as três topologias de rede, existe uma disparidade de comportamentos que ocorrem em cada situação dependendo do número de corpos ligados a um dado satélite e da sua distância do líder. Na Tabela 6.2 é possível ainda observar os resultados de cada teste tendo em conta três métodos de desempenho que são respetivamente a Raiz do Erro Quadrático Médio (*Root Mean Square Error*) (RMSE), a energia despendida média e o erro de saída final.

Tabela 6.2: Desempenho da simulação do MPC distribuído para o pelotão de múltiplos satélites com topologia de rede

f	**Rede**	$\sqrt{\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1}\|\|\mathcal{E}(k)-\mathcal{E}_d(k)\|\|^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1}\|\|\mathbf{u}(k)\|\|^2}$ $[\mathrm{m\,s^{-2}}]$	$\|\|\mathcal{E}(n_k)-\mathcal{E}_d(n_k)\|\|$
1	SAL	19.781	4.930	3.262×10^{-6}
	BDL	41.506	4.697	7.180×10^{-6}
	SDAL	19.980	5.064	3.783×10^{-6}
2	SAL	36.932	4.807	4.873×10^{-6}
	BDL	44.486	4.682	5.385×10^{-6}
	SDAL	36.829	4.840	4.727×10^{-6}
3	SAL	40.557	4.884	6.726×10^{-6}
	BDL	50.787	4.346	1.035×10^{-5}
	SDAL	71.448	4.665	1.419×10^{-5}
4	SAL	31.953	3.985	4.670×10^{-6}
	BDL	33.542	4.836	7.941×10^{-6}
	SDAL	58.155	4.214	8.990×10^{-6}

Analisando os resultados do satélite seguidor um nas diferentes topologias de rede, presentes na Figura 6.2, pode-se concluir que a posição converge continuamente sem oscilação e sem sobrelevação para a referência. Referência esta que vai variar para cada topologia, uma vez que depende do número de vizinhos a que este está interligado, o que explica a diferença da topologia BDL em relação às outras. No que diz respeito à velocidade relativa existe um aumento absoluto da velocidade inicial até atingir um pico máximo e depois converge para zero com alguma sobrelevação em x para as topologias SAL e SDAL, apesar de não ser muito significativa. Comparando as topologias SAL e SDAL, que apresentam as mesmas condições iniciais e a mesma referência, pode-se concluir que a SAL apresenta resultados ligeiramente superiores, especialmente quando se observa a ação de controlo e os resultados da Tabela 6.2. É no entanto uma diferença de desempenho pouco significativa.

Mais uma vez, para o satélite seguidor dois os resultados, presentes na Figura 6.3,

mostram que as topologias SAL e SDAL apresentam comportamentos muito semelhantes, sendo a diferença mais significativa na ação de controlo em x onde a topologia SAL apresenta mais oscilação. Pela Tabela 6.2 também se pode concluir que a SAL apresenta mais erro, menos energia despendida e maior erro final que a SDAL, mas tudo diferenças pouco relevantes.

Passando para os resultados do seguidor três, presentes na Figura 6.4, já se conseguem observar três trajetórias diferentes para cada uma das topologias, destacando a sobrelevação na posição e velocidade relativa em z para a topologia SAL. Já na ação de controlo, a BDL apresenta significativamente mais oscilação que as restantes topologias.

Finalmente para os resultados do seguidor quatro, presentes na Figura 6.5, consegue-se observar que, apesar das topologias SAL e BDL terem a mesma condição inicial e a mesma posição desejada, estas seguem trajetórias diferentes, como se verifica na Figura 6.5 c) relativa ao erro da posição 3D. Destas duas topologias a SAL é mais rápida e com menos sobrelevação na velocidade. Esta comparação também se vê na Tabela 6.2, onde para o satélite quatro, a SAL apresenta melhores desempenhos em todos os critérios.

De notar que estes comportamentos podiam ter sido melhorados com diferentes parâmetros de simulação em algumas situações, realizando mais testes e análises específicas para cada topologia e considerando diferentes penalizações e condições para cada satélite. No entanto, o objetivo era ter os mesmos parâmetros para todas as topologias introduzidas.

7

MPC Não Linear para Serviço de Satélites em Órbita

Com o aumento de satélites artificiais a navegar no espaço, começou a existir a necessidade de reparar, montar ou até reabastecer esses objetos, enquanto continuam em funcionamento e em órbita. Essas operações são denominadas de Serviço de Satélite em Órbita (*On-Orbit Satellite Servicing*) (OOSS), que é mais uma das aplicações da manobra de *rendezvous*. Reparar satélites ainda em órbita sai mais barato do que refazer e mandar para o espaço um satélite novo e ainda origina menos lixo espacial uma vez que aumenta o seu ciclo de vida. Relativamente ao reabastecimento esta é uma operação comum por exemplo na ISS para a entrega de mantimentos ou recursos humanos. No entanto, este tipo de missões gera questões e preocupações a nível político, legal, económico e de segurança, que é fundamentado em [113]. Um exemplo real desta abordagem no espaço foram as missões de serviço para o Hubble, cinco no total, para corrigir anomalias, substituir equipamentos e adicionar novos instrumentos [114, 115].

Juntando esta necessidade de serviço com o conceito de múltiplos satélites cooperativos, há potencial para aumentar ainda mais a eficácia deste processo, onde um conjunto de satélites pode interagir ao mesmo tempo com o corpo passivo a ser operado, mas tendo em atenção ao mesmo tempo a posição dos outros satélites, evitando colisões. Este tipo de abordagem favorece especialmente satélites de grande dimensão, como a ISS, em situações de tráfego onde diversos satélites pretendem operar todos no mesmo objeto, no mesmo instante de tempo.

Pretende-se assim recorrer ao Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC) não linear para controlar este tipo de sistema, ilustrado na Figura 7.1, tendo em conta não só a dinâmica relativa translacional mas também a dinâmica relativa rotacional, uma vez que neste tipo de missões a orientação dos satélites é um ponto crucial. Mas não basta incorporar a dinâmica rotacional, é preciso também saber para onde apontar e tendo em conta que se considera apenas um modelo relativo entre

satélites, é deduzida uma fórmula de atitude relativa que determina a orientação desejada para os satélites de serviço em relação à do objeto central. Uma vez que todos os satélites se movem à volta do objeto central a ser operado este também pode ser considerado a origem do referencial relativo comum a todos os satélites de serviço, o que facilita por exemplo a adição de restrições de desvio de obstáculos para os satélites e restrições para proteger o próprio objeto.

Apresenta-se assim a dinâmica do sistema que se quer implementar, bem como o problema de optimização, as restrições consideradas, o planeamento de atitude que leva os satélites a apontar para um certo ponto e os resultados obtidos para a simulação de teste.

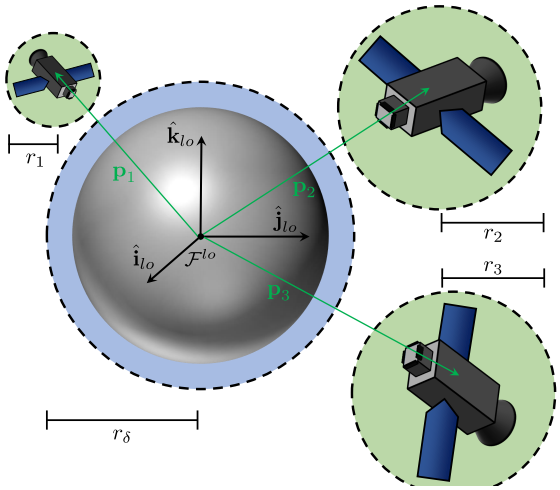


Figura 7.1: Representação de um grupo de satélites de serviço a operar num objeto central

7.1 Dinâmica do Sistema

Considere-se um sistema composto por λ satélites de serviço com massas m_i, $i = 1, 2, ..., \lambda$, tal que, cada satélite se move à volta do mesmo objeto central passivo, o qual pode ser delimitado por uma região esférica de raio r_δ e que age como a origem do referencial orbital relativo $\mathcal{F}^{lo}$, referencial comum a todos os satélites de serviço. Assume-se também que o referencial $\mathcal{F}^{lo}$ coincide com o referencial $\mathcal{F}^{lb}$, que o objeto se encontra numa órbita circular à volta da Terra, que todas as perturbações são desprezadas e ainda que a massa dos satélites é muito menor que a massa da Terra. Neste Capítulo, considera-se a formação líder-seguidor, onde o objeto central passivo representa o líder l e os satélites de serviço representam os satélites seguidores f.

Relembrando a expressão da dinâmica relativa translacional (3.28), da dinâmica relativa rotacional (3.45) e da cinemática relativa de atitude (3.40), pode-se considerar um modelo relativo com seis Graus de Liberdade (*Degrees of Freedom*) (DOF) entre o líder e um dos seguidores, tal que o vetor de estado é dado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & \mathbf{v}^T & \mathbf{q}^T & \boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T \tag{7.1}$$

sendo $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ a posição relativa expressa em $\mathcal{F}^{lo}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^3$ a velocidade relativa expresso em $\mathcal{F}^{lo}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f \otimes \bar{\mathbf{q}}_l \in \mathbb{H}$ o quaternião relativo expresso em $\mathcal{F}^{lo}$ e $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{fb}_{lb,fb} \in \mathbb{R}^3$ a velocidade angular relativa expressa no referencial de corpo fixo do satélite seguidor $\mathcal{F}^{fb}$. Combinando as dinâmicas relativas obtém-se

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{D}_t \mathbf{p} + \mathbf{C}_t \mathbf{v} + \mathbf{F}_{tf} \mathbf{u} + \mathbf{E}_t, \\ \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{C}_r \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{F}_{rf} \mathbf{u} + \mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{E}_r \end{cases} \tag{7.2}$$

onde $\mathbf{F}_{tf}$ e $\mathbf{F}_{rf}$ são as matrizes de configuração dos propulsores para a força de controlo e torque de controlo respetivamente do satélite seguidor, tal que [80]

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{tf} \mathbf{u}, \quad \mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{rf} \mathbf{u} \tag{7.3}$$

com

$$\mathbf{F}_{tf} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

e

$$\mathbf{F}_{rf} = \begin{bmatrix} \frac{L_y}{2} & \frac{L_y}{2} & 0 & 0 & \frac{L_z}{2} & \frac{L_z}{2} \\ -\frac{L_x}{2} & -\frac{L_x}{2} & \frac{L_z}{2} & \frac{L_z}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_y}{2} & -\frac{L_y}{2} & \frac{L_x}{2} & \frac{L_x}{2} \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

sendo $\begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \end{bmatrix}$ as dimensões e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{f1} & u_{f2} & u_{f3} & u_{f4} & u_{f5} & u_{f6} \end{bmatrix}^T$ a ação de controlo do satélite seguidor, como se pode ver na Figura 7.2.

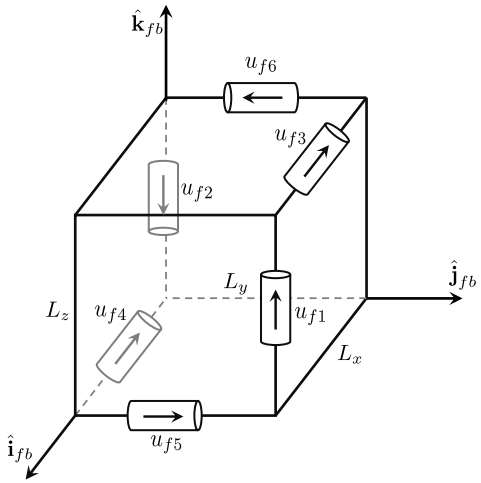


Figura 7.2: Configuração dos propulsores do satélite seguidor, adaptado de [80]

7.2 Problema de Controlo Óptimo

Considere-se um sistema não linear discreto no tempo, descrito pela expressão

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{7.6}$$

que representa o modelo relativo discreto de (7.2), ao aplicar o método de discretização clássico de Runge–Kutta ou apenas RK4, com um problema de controlo óptimo definido por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}} \quad & \mathbf{V}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^+ = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \forall_{k=0,\dots,N-1}, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall_{k=0,\dots,N}, \\ & \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \forall_{k=0,\dots,N-1} \end{aligned} \tag{7.7}$$

que vai ser convertido para uma Programação Não Linear (*NonLinear Programming*) (NLP) com a função de custo

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}) = & \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d)^T \mathbf{Q}_p (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_d)^T \mathbf{Q}_v (\mathbf{v} - \mathbf{v}_d) + \\ & + \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\eta} \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_q \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\eta} \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)^T \mathbf{Q}_w (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{7.8}$$

onde $\mathbf{p}_d$, $\mathbf{v}_d$ e $\boldsymbol{\omega}_d$ são respetivamente a posição, velocidade e velocidade angular desejadas, $\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} & \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T \end{bmatrix}^T$ é o erro do quaternião, $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\mathbf{Q}_v \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\mathbf{Q}_q \in \mathbb{R}^{4\times4}$, $\mathbf{Q}_\omega \in \mathbb{R}^{3\times3}$ e $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{6\times6}$ são as matrizes de penalização da posição, velocidade, quaterniões, velocidade angular e ação de controlo, respetivamente, N é o horizonte de controlo, $\mathcal{X}$ é o conjunto de restrições para as variáveis de estado e $\mathcal{U}$ o conjunto de restrições para as variáveis de controlo.

7.3 Restrições

No que diz respeito às restrições, podem ser reutilizadas algumas restrições que já foram apresentadas anteriormente, nomeadamente a restrição de ação de controlo

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max}, \tag{7.9}$$

a restrição de velocidade

$$\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{v}_{max} \tag{7.10}$$

e ainda a restrição de desvio de obstáculos.

Para as restrições de desvio de obstáculos vão ser consideradas duas situações diferentes, uma para prevenir a colisão com o objeto passivo localizado na origem de $\mathcal{F}^{lo}$, que resulta na restrição

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq (r_\delta + r_f)^2 \tag{7.11}$$

onde r_f é o raio da esfera que representa o satélite seguidor. Para além disso, uma restrição de desvio de obstáculos acoplado é considerado de maneira a prevenir a colisão entre os diversos satélites de serviço, ficando

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2. \tag{7.12}$$

onde $i \neq j$.

Finalmente, pode ser adicionada uma restrição de velocidade angular

$$\boldsymbol{\omega}_{min} < \boldsymbol{\omega} < \boldsymbol{\omega}_{max}. \tag{7.13}$$

7.4 Planeamento da Atitude Relativa Desejada

Considere-se a posição $\mathbf{t}$ expressa em $\mathcal{F}^{lo}$, tal que o satélite seguidor varia a sua orientação para apontar diretamente para essa posição, recorrendo à atitude relativa entre o seguidor e o líder. Situação ilustrada na Figura 7.3.

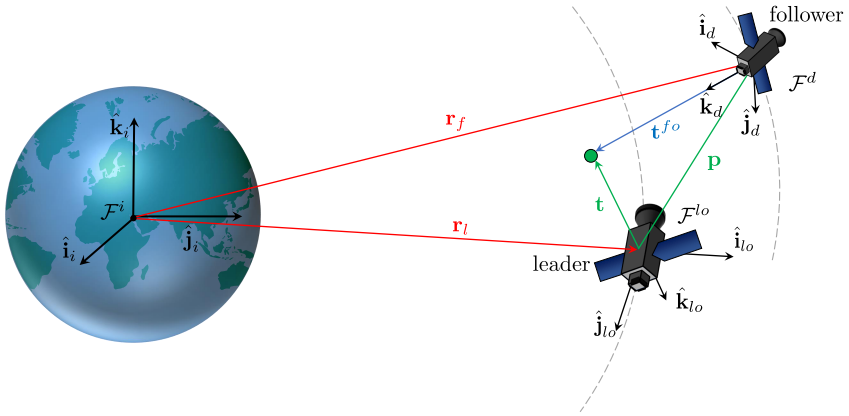


Figura 7.3: Formação líder-seguidor com o satélite seguidor a apontar para um ponto em $\mathcal{F}^{lo}$, adaptado de [60]

Esta dedução é inspirada no artigo [116] e modificada devidamente para esta situação de teste. Para o satélite conseguir apontar, um vetor $\mathbf{t}^{fo}$ é considerado que vai desde o satélite até à posição $\mathbf{t}$ no referencial $\mathcal{F}^{fo}$, que resulta em

$$\mathbf{t}^{fo} = \mathbf{R}_{lo}^{fo}(-\mathbf{p} + \mathbf{t}). \tag{7.14}$$

Então, o referencial desejado $\mathcal{F}^d : \{\mathbf{O}_f, \hat{\mathbf{i}}_d, \hat{\mathbf{j}}_d, \hat{\mathbf{k}}_d\}$ pode ser definido como

$$\hat{\mathbf{k}}_d = \mathbf{t}^{fo}/\|\mathbf{t}^{fo}\|, \quad \hat{\mathbf{j}}_d = \hat{\mathbf{k}}_d \times \mathbf{p}/\|\hat{\mathbf{k}}_d \times \mathbf{p}\|, \quad \hat{\mathbf{i}}_d = \hat{\mathbf{j}}_d \times \hat{\mathbf{k}}_d \tag{7.15}$$

de maneira a obter a velocidade angular desejada [116]

$$\boldsymbol{\omega}_{fo,d}^{d} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\mathbf{t}}^{fo}\cdot\hat{\mathbf{j}}_d}{\|\mathbf{t}^{fo}\|} & \frac{\dot{\mathbf{t}}^{fo}\cdot\hat{\mathbf{i}}_d}{\|\mathbf{t}^{fo}\|} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{7.16}$$

onde

$$\dot{\mathbf{t}}^{fo} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{fo,lo}^{fo})\mathbf{t}^{fo} + \mathbf{R}_{lo}^{fo}(-\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{t}}). \tag{7.17}$$

Considerando que $\mathcal{F}^{fo}$ é paralela a $\mathcal{F}^{lo}$ uma vez que a distância entre os corpos do sistema é suficientemente próxima quando comparada com o raio da órbita, uma aproximação pode ser feita, com $\boldsymbol{\omega}_{fo,lo}^{fo} \approx \mathbf{0}$ e $\mathbf{R}_{lo}^{fo} \approx \mathbf{I}_3$. Como $\mathbf{t}$ é uma posição constante em $\mathcal{F}^{lo}$, a expressão (7.17) pode ainda ser simplificada, ficando

$$\dot{\mathbf{t}}^{fo} = -\dot{\mathbf{p}}. \tag{7.18}$$

Considerando o erro da velocidade angular relativa como

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d = \boldsymbol{\omega}_{lb,fb}^{fb} - \boldsymbol{\omega}_{lb,d}^{fb} \tag{7.19}$$

pretende-se determinar

$$\boldsymbol{\omega}_d = \boldsymbol{\omega}_{lb,d}^{fb} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{fo,fb}^{fb} + \mathbf{R}_d^{fb}\boldsymbol{\omega}_{fo,d}^{d}. \tag{7.20}$$

Pela expressão (7.20) começa-se por determinar $\boldsymbol{\omega}_{fo,fb}^{fb}$, que pode ser definido como

$$\boldsymbol{\omega}_{fo,fb}^{fb} = \boldsymbol{\omega}_{i,fb}^{fb} - \mathbf{R}_{fo}^{fb}\boldsymbol{\omega}_{i,fo}^{fo} \tag{7.21}$$

onde $\boldsymbol{\omega}_{i,fb}^{fb}$ pode ser determinada a partir da velocidade angular relativa dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{i,fb}^{fb} - \mathbf{R}_{lb}^{fb}\boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb} \tag{7.22}$$

uma vez que $\boldsymbol{\omega}_{i,lb}^{lb} = \boldsymbol{\omega}_{i,lo}^{lo} = \begin{bmatrix}0 & 0 & n_l\end{bmatrix}^T$, sendo n_l a taxa orbital do líder e

$$\mathbf{R}_{lb}^{fb} = \mathbf{I}_3 + 2\eta\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mathbf{S}^2(\boldsymbol{\epsilon}) \tag{7.23}$$

enquanto que $\boldsymbol{\omega}_{i,fo}^{fo} = \begin{bmatrix}0 & 0 & n_f\end{bmatrix}^T$, sendo n_f a taxa orbital do seguidor. Como neste caso $\mathcal{F}^{lo}$ é equivalente a $\mathcal{F}^{lb}$, o quaternião do líder fica $\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix}1, & \mathbf{0}\end{bmatrix}^T$, o que permite obter a matriz de rotação $\mathbf{R}_{fo}^{fb}$ através de $\mathbf{q}_f$. Ainda na expressão (7.20) quer-se determinar $\mathbf{R}_d^{fb}$, que pode ser definido como

$$\mathbf{R}_d^{fb} = \mathbf{R}_{fo}^{fb}\mathbf{R}_d^{fo} \tag{7.24}$$

e onde $\mathbf{R}_d^{fo}$ é obtido através dos versores do referencial $\mathcal{F}^d$, expressos em (7.15). Adicionalmente, o erro do quaternião é dado por

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_f \otimes \bar{\mathbf{q}}_d \tag{7.25}$$

tal que $\bar{\mathbf{q}}_d$ é determinado a partir de $\mathbf{R}_d^{fo}$.

7.5 Simulação e Resultados

Para simular o MPC proposto neste Capítulo recorre-se à plataforma MATLAB ® R2019A com o auxílio da biblioteca CasADi [112] para resolver o problema de optimização, simulando a mesma dinâmica que foi usada para formular este MPC e desprezando o uso de ruído ou sensores. A fim de demonstrar as capacidades do MPC que foi formulado simula-se uma situação de teste, realçando o comportamento do sistema face às restrições impostas.

Considera-se uma situação de teste composta por dois satélites que se movem à volta de um objeto central e para visualizar a evolução da atitude recorre-se aos ângulos de Euler com rotação XYZ. Nas Figuras 7.4, 7.5 e 7.6 é possível observar os resultados obtidos e na Tabela 7.1 os parâmetros de simulação.

$$\mathbf{p}_{d1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{para } t \leq 40, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}^T & \text{para } 40 < t \leq 80, \\ \begin{bmatrix} 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{para } t > 80 \end{cases} \quad \mathbf{p}_{d2} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}^T & \text{para } t \leq 40, \\ \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{para } 40 < t \leq 80, \\ \begin{bmatrix} 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{para } t > 80 \end{cases} . \tag{7.26}$$

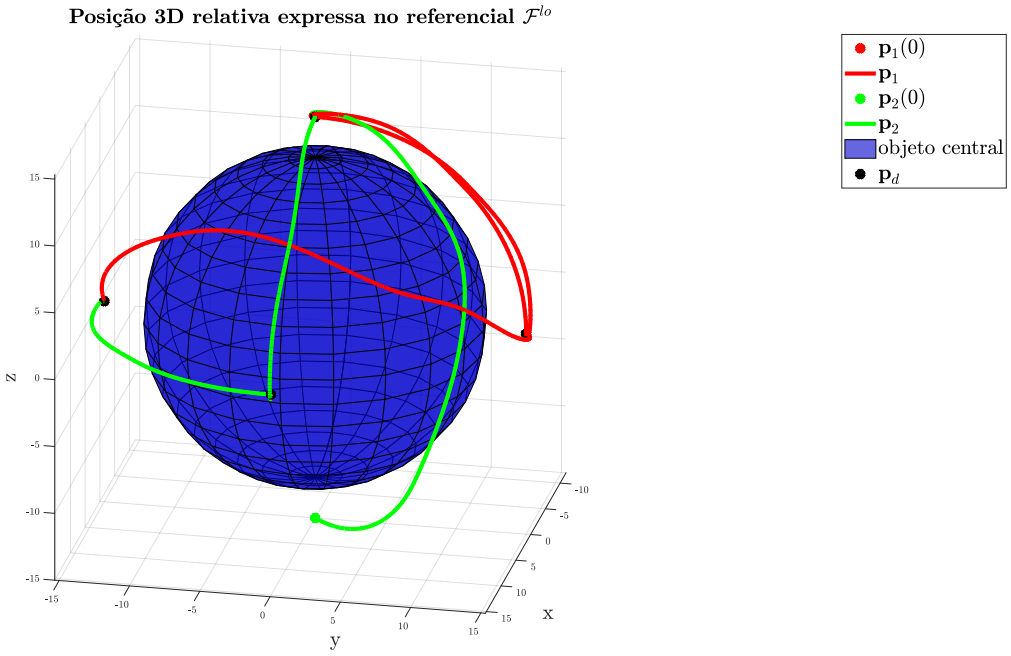
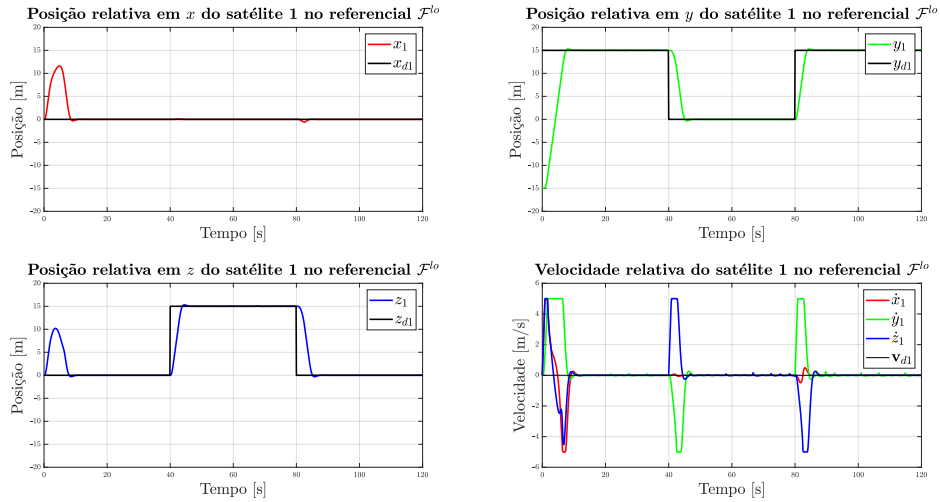


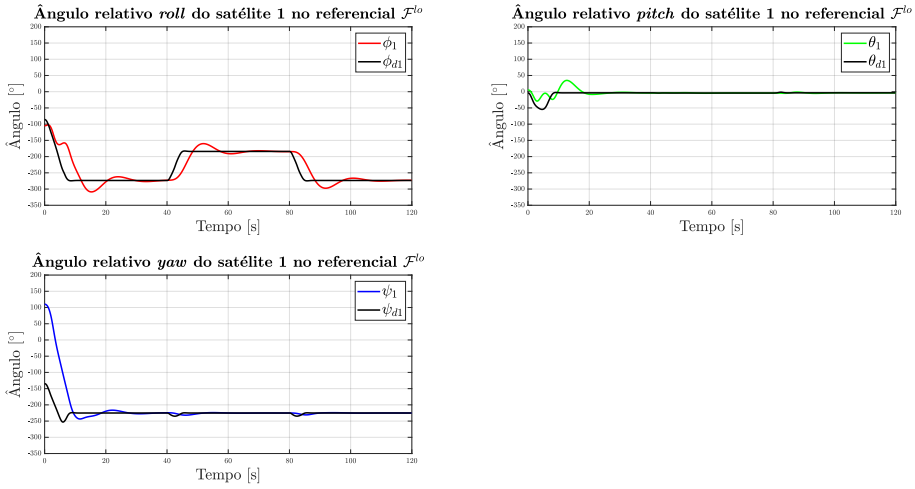
Figura 7.4: Resultados da posição 3D dos diversos satélites de serviço à volta do objeto central

Tabela 7.1: Parâmetros de simulação do MPC não linear para serviço de satélites em órbita

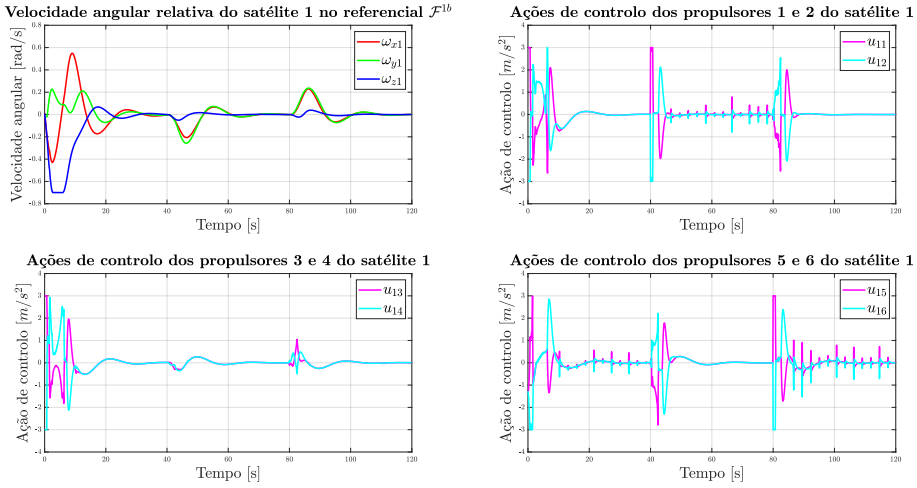
Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
condições ambientais			
parâmetro gravitacional da Terra	μ	$3.986\,004\,41 \times 10^{14}$	$\mathrm{m^3\,s^{-2}}$
condições dos satélites			
raio orbital do líder	r_l	6621000	m
matriz de inércia dos seguidores	$\mathbf{J}_f$	$\begin{bmatrix} 10 & 2.5 & 3.5 \\ 2.5 & 10 & 4.5 \\ 3.5 & 4.5 & 10 \end{bmatrix}$	$\mathrm{kg\,m^2}$
matriz de inércia do líder	$\mathbf{J}_l$	$\mathrm{diag}(10, 10, 10)$	$\mathrm{kg\,m^2}$
dimensão dos satélites	$\begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	m
condições iniciais			
posição inicial do satélite 1	$\mathbf{p}_1(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}^T$	m
posição inicial do satélite 2	$\mathbf{p}_2(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}^T$	m
velocidade inicial	$\mathbf{v}(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
quaternião inicial	$\mathbf{q}(0)$	$[0.37 \quad -0.43 \quad 0.66 \quad 0.49]^T$	
velocidade angular inicial	$\boldsymbol{\omega}(0)$	$\begin{bmatrix} 0.01 & -0.02 & 0.01 \end{bmatrix}^T$	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
referências			
posição desejada	$\mathbf{p}_d$	expressão (7.26)	m
velocidade desejada	$\mathbf{v}_d$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
configuração do MPC			
tempo de amostragem	T_s	0.1	s
número de iterações	n_k	1200	
horizonte de controlo	N	30	
penalização da posição	$\mathbf{Q}_p$	$10\mathbf{I}_3$	
penalização da velocidade	$\mathbf{Q}_v$	$0.5\mathbf{I}_3$	
penalização do quaternião	$\mathbf{Q}_q$	$15\mathbf{I}_4$	
penalização da velocidade angular	$\mathbf{Q}_\omega$	$0.5\mathbf{I}_3$	
penalização de controlo	$\mathbf{W}$	$2\mathbf{I}_6$	
restrições			
ação de controlo máxima	$\mathbf{u}_{max}$	3	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
velocidade máxima	$\mathbf{v}_{max}$	5	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
velocidade angular máxima	$\boldsymbol{\omega}_{max}$	0.7	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
raio do objeto	r_δ	12	m
raio do satélite f	r_f	3	m



(a)

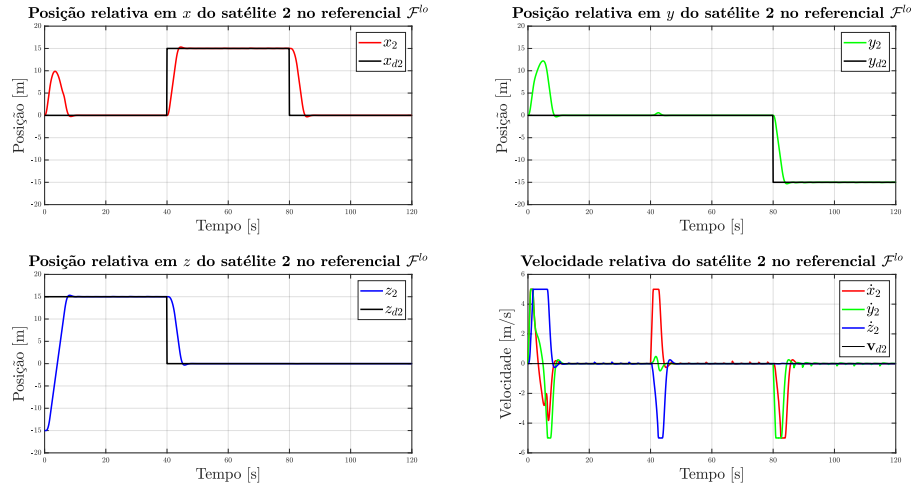


(b)

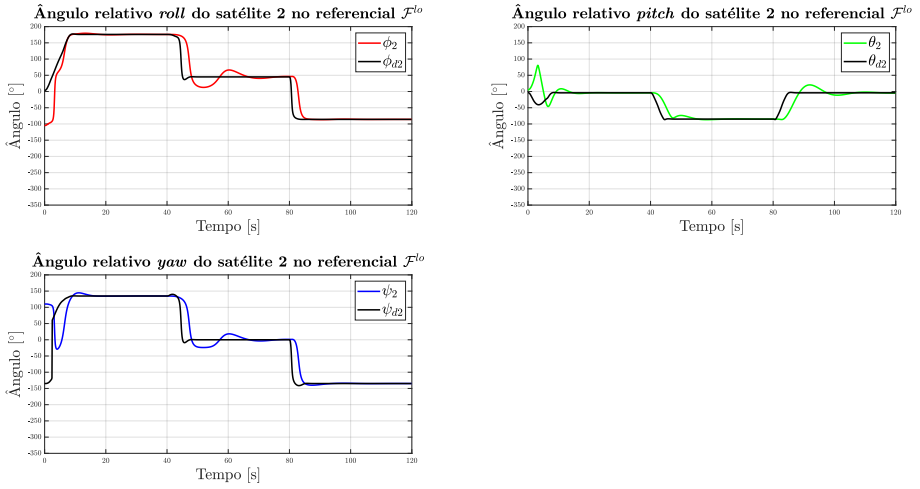


(c)

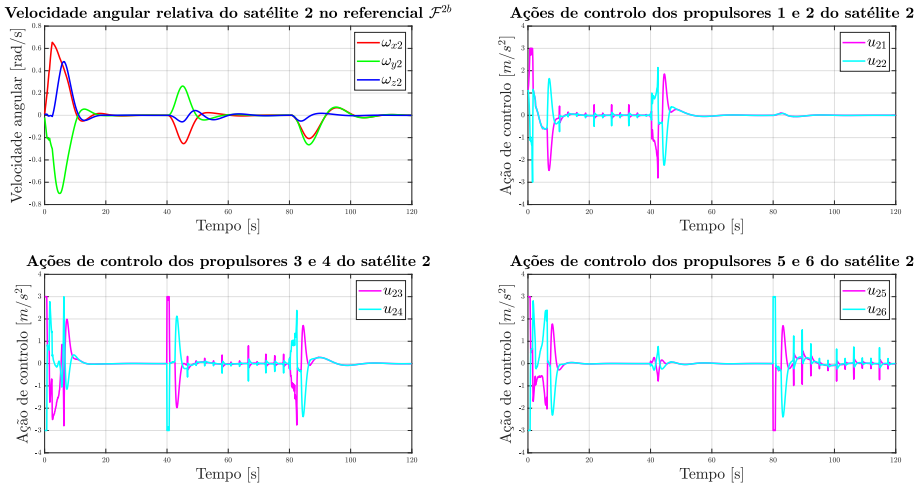
Figura 7.5: Resultados do MPC para o serviço de satélites em órbita, do satélite 1



(a)



(b)



(c)

Figura 7.6: Resultados do MPC para o serviço de satélites em órbita, do satélite 2

Como se pode observar pelas Figuras 7.4, 7.5 e 7.6, em todas as situações a estratégia proposta consegue conduzir com sucesso os satélites para os valores desejados, respeitando ao mesmo tempo todas as restrições que foram impostas e com um comportamento que vai de acordo com as penalizações consideradas. No entanto, existe claramente uma componente oscilatória significativa nos diferentes elementos do sistema, destacando a atitude relativa e a ação de controlo dos satélites.

Analisando os resultados do satélite seguidor um, presentes na Figura 7.5, pode-se concluir que a posição converge para a referência, no entanto com alguns indícios de sobrelevação inicial em x e em z que vem da restrição de desvio de obstáculos para evitar a colisão com o objeto que se encontra no centro do referencial $\mathcal{F}^{lo}$ e que vai obrigar os satélites a movimentar-se à volta desse objeto para chegar à posição desejada. Este comportamento pode ser verificado ao observar a Figura 7.4 que demonstra a posição 3D dos satélites à volta do objeto e a trajetória que tomam para chegar a cada uma das posições desejadas. Para além disso, ainda existe alguma sobrelevação quando se passa para a próxima posição desejada, mas com pouca influência no desempenho do sistema.

A velocidade relativa apresenta também uma oscilação pouco significativa quando se encontra perto do zero, especialmente em y e em z. Passando para a atitude relativa, expressa em ângulos de Euler, é possível observar que os valores seguem a referência, mas com uma oscilação significativa, especialmente para o *roll* do satélite seguidor um, o que influencia a sua rapidez e desempenho.

Na velocidade angular relativa apresenta-se também alguma oscilação, mas é apenas em z que a velocidade angular relativa atinge o limite definido pela restrição.

Finalmente em relação à ação de controlo encontra-se uma quantidade substancial de perturbações, que não são desejáveis e ainda picos de intensidade que são limitadas pelas restrições de ação de controlo.

Já para os resultados do satélite seguidor dois, presentes na Figura 7.6, conseguem-se observar comportamentos muito semelhantes aos do satélite seguidor um, especialmente no que diz respeito à sobrelevação e oscilação durante a evolução do sistema. Consegue-se observar mais uma vez o efeito da restrição de desvio de obstáculos para evitar a colisão com o objeto central na posição relativa e o efeito das restrições de velocidade relativa, ação de controlo e velocidade angular relativa nos respetivos elementos.

8

Conclusões e Trabalho Futuro

Este Capítulo tem como objetivo apresentar os desenvolvimentos e contribuições que foram alcançados a partir desta dissertação, tal como o trabalho futuro que pode ser aprofundado e melhorado para cada uma das estratégias que foram propostas.

8.1 Conclusões

O objectivo principal desta dissertação foi desenvolver e repensar o problema de *rendezvous* numa solução óptima e cooperativa para dois cenários, nomeadamente sincronização de satélites e serviço em órbita de satélites, que originou três estratégias de controlo cooperativas diferentes, recorrendo ao Controlo Preditivo baseado em Modelos (*Model Predictive Control*) (MPC).

Na fase inicial foi realizado um trabalho de pesquisa bibliográfico que pretendia não só assimilar os conceitos fundamentais de Engenharia Aeroespacial, mas também perceber o que era o *rendezvous*, qual a sua aplicabilidade e como é que é implementado na bibliografia atual. Isto engloba também recursos que expõem as possibilidades da exploração espacial e o seu futuro, recursos que foram indispensáveis para formular o pensamento crítico e criativo. Uma investigação inicial também foi realizada sobre o MPC, especialmente na sua história, evolução, variedade e relação com os sistemas aéreos. Com esses conhecimentos agregados, o Estado de Arte foi formulado, composto pelos Capítulos 2 e 3.

Posteriormente ao Estado de Arte, foram efetuados dois trabalhos preliminares que permitiram aplicar na prática os conceitos teóricos que foram assimilados e aprofundados. No entanto, apenas no segundo trabalho se recorreu ao MPC linear com restrições para lidar com um problema de *rendezvous* entre dois satélites. Este segundo trabalho resultou no Capítulo 4, que demonstra as capacidades e o desempenho que o MPC linear pode ter mesmo quando sujeito a diversas restrições de controlo e de estado. Serviu de base para as estratégias propostas nos Capítulos subsequentes.

Com o intuito de conseguir aplicar algoritmos de controlo distribuído, um sistema de pelotão foi pensado recorrendo a uma dinâmica relativa entre os vários satélites que se encontram acoplados pelas suas ações de controlo, estabelecendo uma topologia de rede unidirecional e uma formação líder-seguidor. Sendo assim, foi formulado um MPC distribuído com um problema de optimização que inclui não só restrições de desvio de obstáculos entre os diversos satélites mas também a capacidade de lidar com limitações físicas e problemas de visibilidade, que são verificadas num ambiente de simulação perante diferentes cenários de teste. Proposta que se encontra no Capítulo 5.

Adicionalmente, é desenvolvida uma segunda estratégia distribuída para o cenário de pelotão de satélites, mas desta vez tendo a capacidade de configurar diferentes topologias de rede, recorrendo à teoria de grafos. Um conjunto de topologias relevantes para cenários de pelotão são apresentados e depois analisados num ambiente de simulação, onde se conseguem avaliar os diferentes comportamentos e desempenhos que estas topologias têm no sistema, mas sempre cumprindo as restrições impostas e a convergir para os valores desejados. Proposta que se encontra no Capítulo 6.

Outro cenário cooperativo é desenvolvido para o problema de serviço em órbita de satélites, onde nesta situação em particular um conjunto de satélites ativos movimentam-se e variam a sua orientação tendo em conta um objeto central, recorrendo a uma dinâmica não linear relativa translacional e rotacional. Neste caso foram incorporados não só restrições de colisão e de limitações físicas mas também a capacidade de um satélite apontar para o objeto, recorrendo apenas à atitude relativa. Mais uma vez, efetuaram-se simulações que demonstram as capacidades deste MPC não linear em convergir para os valores desejados, enquanto se satisfazem todas as restrições. Proposta que se encontra no Capítulo 7.

Finalmente, a partir do desenvolvimento efetuado nos Capítulos 5 e 7, foi submetido e aceite um artigo cientifico para a conferência EuroGNC 2022 [117].

8.2 Trabalho Futuro

Uma vez que foram realizadas três propostas diferentes nesta dissertação, o pelotão de satélites com duas estratégias distribuídas diferentes e ainda outra estratégia cooperativa para o serviço de satélites, existe uma variedade de aspetos que podem ser mais desenvolvidos num trabalho futuro.

Em ambos os cenários:

1. Realizar testes de simulação mais avançados, com cenários mais rigorosos e incorporando por exemplo ruído. Ter também um conjunto de testes que permita comparar o desempenho do sistema face a diferentes parâmetros de simulação;

2. Realizar testes em *hardware*, o que requer uma parceria com uma empresa privada ou centro de investigação;

3. Adicionar e investigar mais restrições relevantes para o problema de *rendezvous* e de *docking*, como por exemplo a poupança da energia despendida, a restrição da direção dos propulsores, restrições de velocidade gradual ao aproximar-se do satélite sucessor ou ainda considerar outros tipos de restrições como as convexas;

4. Investigar novas variações a incorporar no MPC e verificar a sua eficácia, como o controlo robusto, o controlo híbrido, etc.

No pelotão de múltiplos satélites:

1. Comparar num ambiente de simulação a configuração distribuída já implementada com a configuração centralizada e descentralizada;

2. Incorporar novas trajetórias de planeamento, com a capacidade de lidar com manobras mais agressivas e restritas como por exemplo a troca de liderança dos satélites, conseguir trocar a ordem dos satélites seguidores na formação ou ainda a capacidade de *docking* sucessivo dos satélites seguidores com o satélite líder após a sincronização completa do pelotão, o que poderia relacionar-se com o cenário de serviço de satélites;

3. Investigar e testar novos algoritmos distribuídos de controlo, para depois serem comparados com os algoritmos já implementados;

4. Averiguar e estudar os protocolos e atrasos de comunicação existentes para este tipo de problema;

5. Adicionar uma dinâmica relativa rotacional que permita estabilizar e sincronizar a orientação dos diversos satélites;

6. Efetuar a análise de estabilidade completa das duas abordagens, incluindo também as restrições e topologias consideradas;

7. Publicar um artigo científico de revista, que estende o artigo de conferência, ao generalizar as topologias de rede numa formação líder-seguidor para um cenário de pelotão de satélites. Trabalho que foi iniciado no Capítulo 6.

No serviço de satélites em órbita:

1. Incorporar novas trajetórias de planeamento para realizar as manobras de serviço, seja entrega, manutenção, etc., o que envolve estudar mais a fundo a manobra de *docking*;

2. Adicionar uma componente distributiva e de redes para interligar os diversos satélites seguidores;

3. Efetuar a análise de estabilidade da estratégia proposta, começando por desprezar as restrições;

4. Desenvolver restrições de colisão que representem em maior detalhe os limites do objeto central, em vez de considerar o objeto como uma esfera.

Bibliografia

[1] Anantha Komanduri. *Guidance and control of a spacecraft to rendevous and dock with a non-cooperative target*. Göttingen, Germany: Cuvillier Verlag, 2011. ISBN: 9783736939455 (ver pp. 6–8).

[2] David Woffinden e David Geller. "Navigating the road to autonomous orbital rendezvous". Em: *Journal Spacecraft Rockets* 44.4 (2007), pp. 898–909. DOI: 10.2514/1.30734 (ver p. 6).

[3] Luo Yazhong, Zhang Jin e Tang Guojin. "Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous". Em: *Chinese Journal of Aeronautics* 27.1 (2014), pp. 1–11. DOI: 10.1016/j.cja.2013.07.042 (ver pp. 6, 7).

[4] Piotr Felisiak. "Control of spacecraft for rendezvous maneuver in an elliptical orbit". Tese de doutoramento. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Processos e Aviação pela Universidade Tecnológica de Wroclaw, Polónia, jun. de 2015 (ver pp. 6, 11).

[5] Wigbert Fehse. *Automated rendezvous and docking of spacecraft*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511543388 (ver pp. 6, 8, 36).

[6] Steve Eckersley et al. "Future rendezvous and docking missions: Enabled by low-cost but safety compliant guidance navigation and control (GNC) architectures". Em: *JBIS - Journal of the British Interplanetary Society* 71.9 (2017), pp. 323–347 (ver p. 7).

[7] Douglas Zimpfer, Peter Kachmar e Seamus Tuohy. "Autonomous rendezvous, capture and in-space assembly: Past, present and future". Em: *1st Space Exploration Conference: Continuing the Voyage of Discovery*. 2005, p. 2523. DOI: 10.2514/6.2005-2523 (ver p. 7).

[8] Robert Friend. "Orbital Express program summary and mission overview". Em: *Sensors and Systems for Space Applications II*. 2008, pp. 11–21. DOI: 10.1117/12.783792 (ver p. 7).

[9] *ESA commissions world's first space debris removal*. Acedido: 27/11/2021 [ONLINE]. 2019. URL: https://www.esa.int/Safety_Security/Clean_Space/ESA_commissions_world_s_first_space_debris_removal (ver p. 7).

[10] Satomi Kawamoto et al. "Precise numerical simulations of electrodynamic tethers for an active debris removal system". Em: *Acta Astronautica* 59.1 (2006), pp. 139–148. DOI: 10.1016/j.actaastro.2006.02.035 (ver p. 7).

[11] Shin-Ichiro Nishida et al. "Space debris removal system using a small satellite". Em: *Acta Astronautica* 65.1 (2009), pp. 95–102. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.01.041 (ver p. 7).

[12] J.-C. Liou, N. Johnson e N. Hill. "Controlling the growth of future LEO debris populations with active debris removal". Em: *Acta Astronautica* 66.5 (2010), pp. 648–653. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.08.005 (ver p. 7).

[13] Qi Li et al. "Model predictive control for autonomous rendezvous and docking with a tumbling target". Em: *Aerospace Science and Technology* 69 (2017), pp. 700–711. DOI: 10.1016/j.ast.2017.07.022 (ver pp. 7, 11, 23, 35).

[14] David Geller. "Orbital rendezvous: When is autonomy required?" Em: *Journal Guidance, Control, and Dynamics* 30.4 (2007), pp. 974–981. DOI: 10.2514/1.27052 (ver p. 7).

[15] Herbert Kramer. *STP-1 (space test program-1) / Orbital Express*. Acedido: 14/02/2021 [ONLINE]. 2002. URL: https://earth.esa.int/web/eoportal/satellite-missions/s/stp-1 (ver p. 8).

[16] *ClearSpace-1 prepares to reenter with Vespa*. Acedido: 27/11/2021 [ONLINE]. 2020. URL: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2020/11/ClearSpace-1_prepares_to_reenter_with_Vespa (ver p. 8).

[17] Omer Iskender. "Model predictive control for spacecraft rendezvous and docking with uncooperative targets". Acedido: 19/01/2021 [ONLINE]. Tese de doutoramento. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Eletrónica e Elétrica pela Universidade Tecnológica de Nanyang, Singapura, out. de 2020. URL: https://hdl.handle.net/10356/144018 (ver pp. 8, 10).

[18] John Goodman. "History of space shuttle rendezvous and proximity operations". Em: *Journal of Spacecraft and Rockets* 43 (set. de 2006), pp. 944–959. DOI: 10.2514/1.19653 (ver p. 8).

[19] Jackson Ryan. *SpaceX, NASA Crew-1 mission docks with ISS for six-month stay*. Acedido: 27/12/2020 [ONLINE]. 2020. URL: https://www.cnet.com/news/spacex-nasa-historic-crew-1-mission-docks-with-iss-for-six-month-stay/ (ver p. 9).

[20] W. Clohessy e S. Wiltshire. "Terminal guidance system for satellite rendezvous". Em: *Journal of the Aerospace Sciences* 27.9 (1960), pp. 653–658. DOI: 10.2514/8.8704 (ver pp. 9, 23, 35, 48).

[21] J. Tschauner. "Elliptic orbit rendezvous". Em: *AIAA Journal* 5.6 (1967), pp. 1110–1113. DOI: 10.2514/3.4145 (ver p. 9).

[22] Koji Yamanaka e Finn Ankersen. "New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit". Em: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 25.1 (2002), pp. 60–66. DOI: 10.2514/2.4875 (ver p. 9).

[23] Vincent Pisacane e Robert Moore. *Fundamentals of space systems*. Nova Iorque, EUA: Oxford University Press, 2005. ISBN: 9780195162059 (ver p. 9).

[24] James Wertz e Wiley Larson. *Space mission analysis and design*. 3ª ed. Califórnia, EUA: Microcosm Press, 1999. ISBN: 1881883108 (ver p. 9).

[25] Liuping Wang. *Model predictive control system design and implementation using Matlab*. Londres, Reino Unido: Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-1-84882-331-0 (ver pp. 10, 33).

[26] Caroline Buckner. "Tube-based model predictive control for the approach maneuver of a spacecraft to a free-tumbling target satellite". Acedido: 10/01/2021 [ONLINE]. Tese de mestrado. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Ciência e Tecnologia Espacial Orientada para a Terra pela Universidade Tecnológica de Munique, Alemanha, jan. de 2017. URL: https://elib.dlr.de/111203/ (ver p. 10).

[27] Joe Qin e Thomas Badgwell. "A survey of industrial model predictive control technology". Em: *Control Engineering Practice* 11.7 (2003), pp. 733–764. DOI: 10.1016/S0967-0661(02)00186-7 (ver p. 10).

[28] Binglong Chen e Yunhai Geng. "Simulation of rendezvous and docking between service spacecraft and non-cooperative target with Matlab-Simulink and STK". Em: *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*. 2014, pp. 5727–5732. DOI: 10.1109/WCICA.2014.7053697 (ver p. 10).

[29] Juntang Yang e Enrico Stoll. "Adaptive sliding mode control for spacecraft proximity operations based on dual quaternions". Em: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 42.11 (2019), pp. 2356–2368. DOI: 10.2514/1.G004435 (ver p. 10).

[30] Elisa Capello et al. "Rendez-vous and docking position tracking via sliding mode control". Em: *2015 American Control Conference (ACC)*. 2015, pp. 1893–1898. DOI: 10.1109/ACC.2015.7171009 (ver p. 10).

[31] Christopher Jewison. "Guidance and control for multi-stage rendezvous and docking operations in the presence of uncertainty". Acedido: 19/01/2021 [ONLINE]. Tese de doutoramento. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Aeronáutica e Astronáutica pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts, EUA, jun. de 2017. URL: http://hdl.handle.net/1721.1/112362 (ver pp. 10, 11, 23, 36).

[32] Rajarshi Dastidar. "On the advantages and limitations of sliding mode control for spacecraft". Em: *AIAA SPACE 2010 Conference and Exposition*. 2010, p. 8777. DOI: 10.2514/6.2010-8777 (ver p. 10).

[33] Hongyang Dong, Qinglei Hu e Maruthi Akella. "Dual-quaternion-based spacecraft autonomous rendezvous and docking under six-degree-of-freedom motion constraints". Em: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 41.5 (2017), pp. 1150–1162. DOI: 10.2514/1.G003094 (ver p. 10).

[34] Afonso Botelho. "Design and application of thrust manoeuvres in a constrained spacecraft rendezvous context using optimal control techniques". Acedido: 19/01/2021 [ONLINE]. Tese de mestrado. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores pelo Instituto Superior Técnico, Portugal, out. de 2019. URL: https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/cursos/meec/dissertacao/1691203502343515 (ver pp. 10, 23).

[35] Simone D'Amico et al. *Distributed space missions for Earth system monitoring*. Space Technology Library. Nova Iorque, EUA: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-4541-8 (ver p. 10).

[36] Per Bodin et al. "PRISMA: An in-orbit test bed for guidance, navigation, and control experiments". Em: *Journal of Spacecraft and Rockets* 46.3 (2009), pp. 615–623. DOI: 10.2514/1.40161 (ver p. 10).

[37] M. Saponara et al. "Model predictive control application to spacecraft rendezvous in Mars sample return scenario". Em: *EUCASS Proceedings Series - Advances in AeroSpace Sciences*. 2013, pp. 137–158. DOI: 10.1051/eucass/201306137 (ver p. 10).

[38] John Keesee. *Spacecraft computer systems*. Acedido: 20/12/2021 [ONLINE]. 2003. URL: https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-851-satellite-engineering-fall-2003/lecture-notes/l19scraftcompsys.pdf (ver p. 11).

[39] Edward Hartley. "A tutorial on model predictive control for spacecraft rendezvous". Em: *2015 European Control Conference (ECC)*. 2015, pp. 1355–1361. DOI: 10.1109/ECC.2015.7330727 (ver pp. 11, 26).

[40] Avishai Weiss et al. "Model predictive control for spacecraft rendezvous and docking: Strategies for handling constraints and case studies". Em: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 23.4 (2015), pp. 1638–1647. DOI: 10.1109/TCST.2014.2379639 (ver p. 11).

[41] Stefano Cairano, Hyeongjun Park e Ilya Kolmanovsky. "Model predictive control approach for guidance of spacecraft rendezvous and proximity maneuvering". Em: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 22.12 (2012), pp. 1398–1427. DOI: 10.1002/rnc.2827 (ver p. 11).

[42] L. Ravikumar et al. "Autonomous terminal maneuver of spacecrafts for rendezvous using model predictive control". Em: *2016 Indian Control Conference (ICC)*. 2016, pp. 72–78. DOI: 10.1109/INDIANCC.2016.7441108 (ver p. 11).

[43] Hyeongjun Park, Stefano Cairano e Ilya Kolmanovsky. "Model predictive control for spacecraft rendezvous and docking with a rotating/tumbling platform and for debris avoidance". Em: *Proceedings of the 2011 American Control Conference*. 2011, pp. 1922–1927. DOI: 10.1109/ACC.2011.5991151 (ver p. 11).

[44] Hyeongjun Park et al. "Nonlinear model predictive control for spacecraft rendezvous and docking with a rotating target". Em: *27th AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting*. Acedido: 22/09/2020 [ONLINE]. 2017, pp. 1135–1148. URL: http://hdl.handle.net/10945/51984 (ver p. 11).

[45] Francisco Gavilán, Rafael Vázquez e Eduardo Camacho. "Robust model predictive control for spacecraft rendezvous with online prediction of disturbance bounds". Em: *IFAC Workshop on Aerospace Guidance, Navigation and Flight Control Systems*. Acedido: 19/01/2021 [ONLINE]. 2009. URL: https://hdl.handle.net/11441/95436 (ver p. 11).

[46] Peng Li. "Dynamics and control of spacecraft rendezvous by nonlinear model predictive control". Acedido: 22/09/2020 [ONLINE]. Tese de doutoramento. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia e Ciência da Terra e do Espaço pela Universidade de York, Canadá, set. de 2018. URL: http://hdl.handle.net/10315/35890 (ver p. 11).

[47] L. Ravikumar, Radhakanth Padhi e N. Philip. "Trajectory optimization for rendezvous and docking using nonlinear model predictive control". Em: *IFAC-PapersOnLine* 53.1 (2020), pp. 518–523. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.06.087 (ver pp. 11, 35).

[48] Ali Büyükkoçak e Ozan Tekinalp. "Safe spacecraft rendezvous using dual quaternions on time-dependent trajectories generated by model predictive control". Em: *AIAA Scitech 2019 Forum*. 2019, p. 1914. DOI: 10.2514/6.2019-1914 (ver p. 11).

[49] Avishai Weiss et al. "Model predictive control of three dimensional spacecraft relative motion". Em: *2012 American Control Conference (ACC)*. 2012, pp. 173–178. DOI: 10.1109/ACC.2012.6314862 (ver p. 11).

[50] Marcus Holzinger et al. “Passively safe receding horizon control for satellite proximity operations”. Em: *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2008, pp. 3433–3440. DOI: 10.1109/CDC.2008.4739349 (ver p. 11).

[51] Ali Büyükkoçak. “Autonomous spacecraft rendezvous and docking on safe trajectories”. Acedido: 19/01/2021 [ONLINE]. Tese de mestrado. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Aeroespacial pela Universidade Tecnológica do Médio Oriente, Turquia, set. de 2018. URL: https://hdl.handle.net/11511/27529 (ver pp. 11, 23).

[52] Omer Iskender, Keck-Voon Ling e Vincent Dubanchet. “Constraints tightening approach towards model predictive control based rendezvous and docking with uncooperative targets”. Em: *2018 European Control Conference (ECC)*. 2018, pp. 380–385. DOI: 10.23919/ECC.2018.8550224 (ver pp. 11, 42).

[53] Piotr Felisiak et al. “Spacecraft rendezvous in elliptical orbit using nonlinear model predictive control”. Em: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2014, p. 0090. DOI: 10.2514/6.2014-0090 (ver p. 11).

[54] Li Yuankai, Jing Zhongliang e Hu Shiqiang. “Dynamic optimal sliding-mode control for six-DOF follow-up robust tracking of active satellite”. Em: *Acta Astronautica* 69.7 (2011), pp. 559–570. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.05.003 (ver p. 11).

[55] Hui Liu, Junfeng Li e Baoyin Hexi. “Sliding mode control for low-thrust Earth-orbiting spacecraft formation maneuvering”. Em: *Aerospace Science and Technology* 10.7 (2006), pp. 636–643. DOI: 10.1016/j.ast.2006.04.008 (ver pp. 11, 15).

[56] Daniel Scharf, Fred Hadaegh e Scott Ploen. “A survey of spacecraft formation flying guidance and control. Part II: Control”. Em: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Vol. 4. 2004, pp. 2976–2985. DOI: 10.23919/ACC.2004.1384365 (ver p. 12).

[57] Raymond Kristiansen e Per Nicklasson. “Spacecraft formation flying: A review and new results on state feedback control”. Em: *Acta Astronautica* 65.11 (2009), pp. 1537–1552. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.04.014 (ver p. 12).

[58] Herbert Kramer. *PROBA-3 (Project for on-board autonomy-3)*. Acedido: 30/11/2021 [ONLINE]. URL: https://earth.esa.int/web/eoportal/satellite-missions/p/proba-3 (ver p. 12).

[59] Danwei Wang, Baolin Wu e Eng Chung. *Satellite formation flying*. Vol. 87. Singapura: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2383-5 (ver p. 12).

[60] Raymond Kristiansen et al. “A model of relative translation and rotation in leader-follower”. Em: *Modeling, Identification and Control* 28 (2007), pp. 3–13. DOI: 10.4173/mic.2007.1.1 (ver pp. 12, 27, 28, 87, 110).

[61] Wei Ren e Randal Beard. "Virtual structure based spacecraft formation control with formation feedback". Em: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. 2002, p. 4963. DOI: 10.2514/6.2002-4963 (ver p. 13).

[62] Jonathan Lawton e Randal Beard. "Elementary attitude formation maneuver via leader-following and behavior-based control". Em: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. 2000, p. 4442. DOI: 10.2514/6.2000-4442 (ver p. 13).

[63] Tucker Balch e Ronald Arkin. "Behavior-based formation control for multirobot teams". Em: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 14.6 (1998), pp. 926–939. DOI: 10.1109/70.736776 (ver p. 13).

[64] Kar-Han Tan e M. Lewis. "High precision formation control of mobile robots using virtual structures". Em: *Autonomous Robots - AROBOTS*. Vol. 4. 1997, pp. 387–403. DOI: 10.1109/IROS.1996.570643 (ver p. 13).

[65] Brett Young, Randal Beard e Jed Kelsey. "A control scheme for improving multi-vehicle formation maneuvers". Em: *Proceedings of the 2001 American Control Conference*. Vol. 2. 2001, 704–709 vol.2. DOI: 10.1109/ACC.2001.945797 (ver p. 13).

[66] John Park e Steve Mackay. *Practical data acquisition for instrumentation and control systems*. Oxford, Reino Unido: Newnes, 2003. DOI: 10.1016/B978-0-7506-5796-9.X5000-9 (ver pp. 13, 14).

[67] Josef Papenfort. *Centralized vs. distributed control*. Acedido: 05/05/2021 [ONLINE]. 2005. URL: https://www.controleng.com/articles/centralized-vs-distributed-control/ (ver pp. 13, 14).

[68] Martin Thoma. *Difference between centralized and distributed computing*. Acedido: 05/05/2021 [ONLINE]. 2014. URL: https://stackoverflow.com/questions/19390438/difference-between-centralized-and-distributed-computing (ver pp. 13, 14).

[69] James Rawlings, David Mayne e Moritz Diehl. *Model predictive control: Theory, computation, and design*. 2ª ed. Wisconsin, EUA: Nob Hill Publishing, 2017. ISBN: 9780975937730 (ver pp. 14, 33, 55).

[70] Chung Soon-Jo. "Nonlinear control and synchronization of multiple Lagrangian systems with application to tethered formation flight spacecraft". Acedido: 05/05/2021 [ONLINE]. Tese de doutoramento. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Estimação e Controlo pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts, EUA, jun. de 2007. URL: http://ssl.mit.edu/spheres/videos.html%20http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/7582 (ver p. 14).

[71] *Distributed control systems (DCS) information*. Acedido: 05/05/2021 [ONLINE]. URL: https://www.globalspec.com/learnmore/networking_communication_equipment/networking_equipment/distributed_control_systems_dcs (ver p. 14).

[72] Yi Zong. *Model predictive control (MPC)-based control algorithm for the smart buildings - PowerFlexHouses at PowerLabDK*. Acedido: 05/05/2021 [ONLINE]. 2016. URL: http://www.energylabnordhavn.com/uploads/3/9/5/5/39555879/d3.5a1_model_predictive_control_based_control_algorithm_for_the_smart_buildings_-_powerflexhouses_at_powerlabdk.pdf (ver p. 14).

[73] Louis Breger. "Model predictive control for formation flying spacecraft". Acedido: 08/03/2021 [ONLINE]. Tese de mestrado. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Aeronáutica e Astronáutica pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts, EUA, jun. de 2004. URL: http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/7582 (ver p. 14).

[74] Wei Ren e Randal Beard. "Formation feedback control for multiple spacecraft via virtual structures". Em: *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* 151.3 (2004), pp. 357–368. DOI: 10.1049/ip-cta:20040484 (ver p. 14).

[75] Wei Ren e Randal Beard. "Decentralized scheme for spacecraft formation flying via the virtual structure approach". Em: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 27.1 (2004), pp. 73–82. DOI: 10.2514/1.9287 (ver p. 15).

[76] Xiaogang Wang et al. "A novel decentralized relative navigation algorithm for spacecraft formation flying". Em: *Aerospace Science and Technology* 48 (2016), pp. 28–36. DOI: 10.1016/j.ast.2015.10.014 (ver p. 15).

[77] N. Esfahani e Khashayar Khorasani. "A distributed model predictive control (MPC) fault reconfiguration strategy for formation flying satellites". Em: *International Journal of Control* 89.5 (2016), pp. 960–983. DOI: 10.1080/00207179.2015.1110753 (ver p. 15).

[78] Yang Zheng et al. "Distributed model predictive control for heterogeneous vehicle platoons under unidirectional topologies". Em: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 25.3 (2017), pp. 899–910. DOI: 10.1109/TCST.2016.2594588 (ver pp. 15, 48, 73).

[79] Sina Mansouri, George Nikolakopoulos e Thomas Gustafsson. "Distributed model predictive control for unmanned aerial vehicles". Em: *2015 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)*. 2015, pp. 152–161. DOI: 10.1109/RED-UAS.2015.7441002 (ver p. 15).

[80] Yaguang Yang. *Spacecraft modeling, attitude determination, and control quaternion-based approach*. Maryland, EUA: CRC Press, 2019. ISBN: 9781138331501. DOI: 10.1201/9780429446580 (ver pp. 17, 18, 84, 85, 110).

[81] Soner Karatas. "LEO satellites: Dynamic modelling, simulations and some nonlinear attitude control techniques". Acedido: 22/09/2020 [ONLINE]. Tese de mestrado. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Eletrónica e Elétrica pela Universidade Tecnológica do Médio Oriente, Turquia, abr. de 2006. URL: https://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12607196/index.pdf (ver pp. 17, 18).

[82] Guilherme Trigo. "Robust and adaptive nonlinear attitude control of a spacecraft". Acedido: 22/09/2020 [ONLINE]. Tese de mestrado. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Aeroespacial pelo Instituto Superior Técnico, Portugal, ago. de 2011. URL: https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/cursos/meaer/dissertacao/2353642366049 (ver p. 17).

[83] Paulo Gil. *Elementos de mecânica orbital*. Lisboa, Portugal: Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2015 (ver pp. 17, 18).

[84] John Junkins e Hanspeter Schaub. *Analytical mechanics of space systems*. 2ª ed. Virgínia, EUA: American Institute of Aeronautics e Astronautics Education Series, 2009. DOI: 10.2514/4.867231 (ver pp. 18, 24, 110).

[85] Giulio Avanzini. *Spacecraft attitude dynamics and control*. 3ª ed. Turim, Itália: Departamento de Engenharia Aeronáutica e Espacial - Politécnico de Turim, 2009 (ver p. 18).

[86] Olav Egeland e Jan Gravdahl. *Modeling and simulation for automatic control*. Vol. 76. Trondheim, Noruega: Marine Cybernetics, 2002. ISBN: 8292356010 (ver p. 19).

[87] Ola-Erik Fjellstad. "Control of unmanned underwater vehicles in six degrees of freedom: A quaternion feedback approach". Acedido: 13/09/2021 [ONLINE]. Tese de doutoramento. Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Cibernética pela Universidade de Ciência e Tecnologia Norueguesa, out. de 1994. URL: http://www.fossen.biz/home/PhD/thesis/fjellstad.pdf (ver p. 20).

[88] *3D PowerPoint (Hubble telescope model)*. Acedido: 17/01/2021 [ONLINE]. 2019. URL: https://templates.office.com/en-us/3d-powerpoint-hubble-telescope-model-tm16401558 (ver p. 21).

[89] Christopher Damaren. *Controller discretization*. Acedido: 25/10/2021 [ONLINE]. 2020. URL: http://arrow.utias.utoronto.ca/~damaren/s9.pdf (ver p. 26).

[90] Paulo Gil e Fábio Januário. *Introdução às tecnológicas de computação evolutiva*. Monte da Caparica, Portugal: Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, 2020 (ver p. 29).

[91] Bruno Guerreiro. *Cyber-physical control systems lecture notes*. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa. 2021 (ver pp. 29, 33, 34).

[92] Paulo Gil. *Controlo óptimo em tempo discreto*. Monte da Caparica, Portugal: Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, 2002 (ver p. 29).

[93] Basil Kouvaritakis e Mark Cannon. *Model predictive control: Classical, robust and stochastic*. Nova Iorque, EUA: Springer, 2015. DOI: 10.1007/978-3-319-24853-0 (ver p. 33).

[94] Francisco Gavilán, Rafael Vázquez e Eduardo Camacho. "Chance-constrained model predictive control for spacecraft rendezvous with disturbance estimation". Em: *Control Engineering Practice* 20.2 (2012), pp. 111–122. DOI: 10.1016/j.conengprac.2011.09.006 (ver p. 35).

[95] Louis Breger e Jonathan How. "Safe trajectories for autonomous rendezvous of spacecraft". Em: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 31.5 (2008), pp. 1478–1489. DOI: 10.2514/1.29590 (ver p. 42).

[96] Junping Zhang et al. "Data-driven intelligent transportation systems: A survey". Em: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 12.4 (2011), pp. 1624–1639. DOI: 10.1109/TITS.2011.2158001 (ver p. 48).

[97] Jeroen Ploeg, Nathan Wouw e Henk Nijmeijer. "Lp string stability of cascaded systems: Application to vehicle platooning". Em: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22.2 (2014), pp. 786–793. DOI: 10.1109/TCST.2013.2258346 (ver p. 48).

[98] Aakash Soni e Huosheng Hu. "Formation control for a fleet of autonomous ground vehicles: A survey". Em: *Robotics* 7.4 (2018). DOI: 10.3390/robotics7040067 (ver p. 48).

[99] Alexander Sukhanov e Antonio Prado. "On one approach to the optimization of low-thrust station keeping manoeuvres". Em: *Advances in Space Research* 50.11 (2012), pp. 1478–1488. DOI: 10.1016/j.asr.2012.07.028 (ver p. 48).

[100] Leticia Alves, Mauricio Galo e Maria de Lourdes Galo. "Fundamentos do processamento interferométrico de dados de radar de abertura sintética". Em: *Anais XIV Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto*. Abr. de 2009, pp. 7227–7234 (ver p. 48).

[101] Reza Olfati-Saber e Richard Murray. "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays". Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49.9 (2004), pp. 1520–1533. DOI: 10.1109/TAC.2004.834113 (ver p. 64).

[102] Ali Jadbabaie, Jie Lin e A. Morse. "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules". Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48.6 (2003), pp. 988–1001. DOI: 10.1109/TAC.2003.812781 (ver p. 64).

[103] Wei Ren e Randal Beard. "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies". Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.5 (2005), pp. 655–661. DOI: 10.1109/TAC.2005.846556 (ver p. 64).

[104] Henrique Ferraz e João Hespanha. "Iterative algorithms for distributed leader-follower model predictive control". Em: *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*. 2019, pp. 3533–3539. DOI: 10.1109/CDC40024.2019.9029618 (ver p. 64).

[105] Yu-Ping Tian. *Frequency-domain analysis and design of distributed control systems*. Singapura: Wiley-IEEE Press, 2012. ISBN: 9780470828205 (ver p. 64).

[106] C. R. Johnson. "Positive definite matrices". Em: *The American Mathematical Monthly* 77.3 (1970), pp. 259–264. DOI: 10.2307/2317709 (ver p. 69).

[107] Helmut Lütkepohl. *Handbook of matrices*. Sussex, Reino Unido: John Wiley e Sons, 1996. ISBN: 9780471970156 (ver p. 69).

[108] Kathrin Schäcke. *On the Kronecker product*. Acedido: 17/11/2021 [ONLINE]. 2013. URL: %5Chref%7Bhttps://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/kronthesisschaecke04.pdf%7D%7Bhttps://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry%7D (ver p. 69).

[109] Rajat Mittal. *Lecture 11: Positive semidefinite matrix*. Acedido: 18/11/2021 [ONLINE]. 2014. URL: https://www.cse.iitk.ac.in/users/rmittal/prev_course/s14/notes/lec11.pdf (ver p. 69).

[110] John Nachbar. *Definite matrices*. Acedido: 18/11/2021 [ONLINE]. 2014. URL: https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/sites.wustl.edu/dist/3/2139/files/2019/09/definitematrices.pdf (ver p. 69).

[111] Steve Kirkland e Debdas Paul. "Bipartite subgraphs and the signless Laplacian matrix". Em: *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 5.1 (2011), pp. 1–13. DOI: 10.2298/AADM110205006K (ver p. 72).

[112] Joel Andersson et al. "CasADi - A software framework for nonlinear optimization and optimal control". Em: *Mathematical Programming Computation* 11.1 (2019), pp. 1–36. DOI: 10.1007/s12532-018-0139-4 (ver pp. 75, 89).

[113] Annette Froehlich. *On-orbit servicing: Next generation of space activities*. Vol. 26. Viena, Áustria: Springer, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-51559-1 (ver p. 82).

[114] Joshua Garretson. *Satellite servicing: A history, the impact to the space force, and the logistics behind it*. Acedido: 19/07/2021 [ONLINE]. 2021. URL: https://www.airuniversity.af.edu/Wild-Blue-Yonder/Article-Display/Article/2538269/satellite-servicing-a-history-the-impact-to-the-space-force-and-the-logistics-b/ (ver p. 82).

[115] Rob Garner. *About - Hubble servicing missions*. Acedido: 17/10/2021 [ONLINE]. 2021. URL: https://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/servicing/index.html (ver p. 82).

[116] Rune Schlanbusch, Raymond Kristiansen e Per Nicklasson. "Attitude reference generation for leader-follower formation with nadir pointing leader". Em: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. 2010, pp. 1599–1604. DOI: 10.1109/ACC.2010.5531599 (ver p. 87).

[117] Pedro Pereira, Bruno Guerreiro e Pedro Lourenço. "Cooperative Platooning and Servicing for Spacecraft Formation Flying using Model Predictive Control". Em: *6th CEAS Conference on Guidance, Navigation and Control (EuroGNC)*. 2022 (ver p. 95).

I

Dedução das Equações de Clohessy-Wiltshire-Hill

Este anexo apresenta a dedução que leva às equações lineares de Clohessy-Wiltshire-Hill (CWH), começando por deduzir as equações não lineares de movimento relativo, seguido da sua simplificação para órbitas circulares e finalmente a sua linearização para chegar às equações de CWH. Para o desenvolvimento desta secção, incluindo fundamentos e deduções, recorre-se principalmente a [60, 80, 84].

I.1 Problema de N-corpos

Considere-se um sistema de N corpos com massas m_i, onde $i = 1, 2, \ldots, N$. Os vetores de posição e velocidade do corpo i relativamente a um referencial de Inércia Centrado na Terra (*Earth-Centered Inertial*) (ECI) $\mathcal{F}^i : \{\mathbf{O}_\oplus, \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{j}}_i, \hat{\mathbf{k}}_i\}$ são definidos como $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$ respetivamente, onde

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}}_i + y_i\hat{\mathbf{j}}_i + z_i\hat{\mathbf{k}}_i \tag{I.1}$$

e

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \tag{I.2}$$

A distância entre quaisquer duas partículas com massa m_i e m_j é definida por

$$r_{ij} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| \tag{I.3}$$

e a magnitude da força de atração entre as massas é dada por Gm_im_j/r_{ij}^2 onde G é a constante de gravitação universal. A direção das forças são expressas em termos de vetores unitários, e a força atuando em m_i devido a m_j tem a direção $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)/r_{ij}$, enquanto que a força em m_j devido a m_i tem a direção oposta.

A força $\mathbf{f}_i$ atuando na massa m_i devido a todas as outras $N-1$ massas pode ser expressa como

$$\mathbf{f}_i = G\sum_{j=1}^{N}\frac{m_im_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \quad i \neq j \tag{I.4}$$

e a aplicação da segunda lei do movimento de Newton produz N equações diferenciais vetoriais

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = G\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad i \neq j. \tag{I.5}$$

Juntamente com as condições iniciais apropriadas, isso constituí uma descrição matemática completa do movimento de um sistema de N corpos. A partir desta relação, a equação diferencial fundamental do problema de dois corpos pode ser definida como

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{I.6}$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ é a posição relativa das massas e $\mu = G(m_1 + m_2)$. Expressão esta que descreve a dinâmica orbital de um satélite numa situação ideal.

I.2 Equações Não Lineares de Movimento Relativo

Considere-se um sistema composto por dois satélites em órbita à volta da Terra, um satélite *target* e um satélite *chaser*, desprezando qualquer perturbação ou força externa aplicado nos satélites e considerando também que as suas massas sejam muito pequenas relativamente à massa da Terra.

Através da expressão (I.6), pode-se elaborar a dinâmica dos satélites *target* e *chaser* como

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t \tag{I.7}$$

e

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c. \tag{I.8}$$

Assim, é considerada a derivada em segunda ordem da posição relativa entre o *target* e o *chaser* como

$$\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{r}}_c - \ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \frac{\mu}{r_t^3}\mathbf{r}_t \tag{I.9}$$

sendo a posição relativa expressa no referencial orbital relativo $\mathcal{F}^{to} : \{\mathbf{O}_t, \hat{\mathbf{i}}_{to}, \hat{\mathbf{j}}_{to}, \hat{\mathbf{k}}_{to}\}$ dada por

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_t = x\hat{\mathbf{i}}_{to} + y\hat{\mathbf{j}}_{to} + z\hat{\mathbf{k}}_{to} \tag{I.10}$$

que permite reescrever a posição de inércia do satélite *chaser*

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_t + \mathbf{p} = (x + r_t)\hat{\mathbf{i}}_{to} + y\hat{\mathbf{j}}_{to} + z\hat{\mathbf{k}}_{to} \tag{I.11}$$

tal como a posição do *target* que agora pode ser dada por

$$\mathbf{r}_t = r_t\hat{\mathbf{i}}_{to}. \tag{I.12}$$

Ao derivar duas vezes em relação ao tempo a expressão (I.11) obtém-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = (\ddot{x} + \ddot{r}_t)\hat{\mathbf{i}}_{to} + 2(\dot{x} + \dot{r}_t)\dot{\hat{\mathbf{i}}}_{to} + (x + r_t)\ddot{\hat{\mathbf{i}}}_{to} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}}_{to} + 2\dot{y}\dot{\hat{\mathbf{j}}}_{to} + y\ddot{\hat{\mathbf{j}}}_{to} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}_{to} + 2\dot{z}\dot{\hat{\mathbf{k}}}_{to} + z\ddot{\hat{\mathbf{k}}}_{to} \tag{I.13}$$

e ao considerar as relações entre os versores $\{\hat{\mathbf{i}}_{to}, \hat{\mathbf{j}}_{to}, \hat{\mathbf{k}}_{to}\}$ e a verdadeira anomalia ν

$$\dot{\hat{\mathbf{i}}}_{to} = \dot{\nu}\hat{\mathbf{j}}_{to}, \quad \ddot{\hat{\mathbf{i}}}_{to} = \ddot{\nu}\hat{\mathbf{j}}_{to} - \dot{\nu}^2\hat{\mathbf{i}}_{to}, \tag{I.14}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{j}}}_{to} = -\dot{\nu}\hat{\mathbf{i}}_{to}, \quad \ddot{\hat{\mathbf{j}}}_{to} = -\ddot{\nu}\hat{\mathbf{i}}_{to} - \dot{\nu}^2\hat{\mathbf{j}}_{to} \tag{I.15}$$

a expressão (I.13) pode ser reescrita como

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = (\ddot{x} + \ddot{r}_t - 2\dot{y}\dot{\nu} - \dot{\nu}^2(x + r_t) - y\ddot{\nu})\hat{\mathbf{i}}_{to} + (\ddot{y} + 2\dot{\nu}(\dot{x} + \dot{r}_t) + \ddot{\nu}(x + r_t) - y\dot{\nu}^2)\hat{\mathbf{j}}_{to} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}_{to}. \tag{I.16}$$

O mesmo se pode fazer para a expressão (I.12) ao diferenciá-la duas vezes e aplicando as relações (I.14) e (I.15) para obter a expressão

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = \ddot{r}_t\hat{\mathbf{i}}_{to} + 2\dot{r}_t\dot{\hat{\mathbf{i}}}_{to} + r_t\ddot{\hat{\mathbf{i}}}_{to} = (\ddot{r}_t - r_t\dot{\nu}^2)\hat{\mathbf{i}}_{to} + (2\dot{r}_t\dot{\nu} + r_t\ddot{\nu})\hat{\mathbf{j}}_{to}. \tag{I.17}$$

Assim, a aceleração relativa pode ser definida ao subtrair a expressão (I.17) da expressão (I.16), ficando

$$\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{r}}_c - \ddot{\mathbf{r}}_t = (\ddot{x} - 2\dot{\nu}\dot{y} - \dot{\nu}^2x - \ddot{\nu}y)\hat{\mathbf{i}}_{to} + (\ddot{y} + 2\dot{\nu}\dot{x} + \ddot{\nu}x - \dot{\nu}^2y)\hat{\mathbf{j}}_{to} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}_{to} \tag{I.18}$$

e ao juntar as expressões (I.18) e (I.9) obtém-se o sistema de equações não linear para movimento relativo

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{\nu}\dot{y} - \dot{\nu}^2x - \ddot{\nu}y - \frac{\mu}{r_t^2} = -\frac{\mu}{r_c^3}(r_t + x) \\ \ddot{y} + 2\dot{\nu}\dot{x} + \ddot{\nu}x - \dot{\nu}^2y = -\frac{\mu}{r_c^3}y \\ \ddot{z} = -\frac{\mu}{r_c^3}z \end{cases}. \tag{I.19}$$

I.3 Equações Não Lineares de Movimento Relativo para Órbitas Circulares

Para o caso especial em que se considera a órbita como circular, $\hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{j}}_{to}$ e $\hat{\mathbf{e}}_n = \hat{\mathbf{i}}_{to}$, para além que $\dot{\nu} = n = \sqrt{\frac{\mu}{r_t^3}}$ e $\ddot{\nu} = 0$, que aplicando na expressão (I.19) resulta na expressão

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x - n^2r_t = -\frac{\mu}{r_c^3}(r_t + x) \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\frac{\mu}{r_c^3}y \\ \ddot{z} = -\frac{\mu}{r_c^3}z \end{cases}. \tag{I.20}$$

I.4 Linearização das Equações de Movimento Relativo para Órbitas Circulares

Para realizar a linearização do sistema de equações (I.20) recorre-se à expansão em série de Taylor, de primeira ordem, e tendo como ponto de linearização a origem da

posição relativa $\mathbf{p}$, ou seja, $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Linearização que vai permitir obter as equações de CWH.

Considerando as funções d_x, d_y, d_z como os termos à direita do sistema de equações (I.20), obtém-se

$$\begin{aligned} d_x(x,y,z) &= -\frac{\mu(r_t+x)}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \\ & d_x|_{\mathbf{p}_0} + \frac{\partial d_x}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(x-x_0) + \cancelto{0}{\frac{\partial d_x}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(y-y_0)} + \cancelto{0}{\frac{\partial d_x}{\partial z}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(z-z_0)} = \\ & -\frac{\mu}{r_t^2} + \left(\frac{3\mu(r_t+x)^2}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{\mu}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right)\bigg|_{\mathbf{p}_0}(x-x_0) = \\ & -\frac{\mu}{r_t^2} + \left(\frac{3\mu r_t^2}{r_t^5} - \frac{\mu}{r_t^3}\right)x = -n^2 r_t + 2n^2 x, \end{aligned} \tag{I.21}$$

$$\begin{aligned} d_y(x,y,z) &= -\frac{\mu y}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \\ & \cancelto{0}{d_y|_{\mathbf{p}_0}} + \cancelto{0}{\frac{\partial d_y}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(x-x_0)} + \frac{\partial d_y}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(y-y_0) + \cancelto{0}{\frac{\partial d_y}{\partial z}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(z-z_0)} = \\ & \left(\cancelto{0}{\frac{3\mu y^2}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{5}{2}}}} - \frac{\mu}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right)\bigg|_{\mathbf{p}_0}(y-y_0) = \\ & -\frac{\mu}{r_t^3}y = -n^2 y \end{aligned} \tag{I.22}$$

e

$$\begin{aligned} d_z(x,y,z) &= -\frac{\mu z}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \\ & \cancelto{0}{d_z|_{\mathbf{p}_0}} + \cancelto{0}{\frac{\partial d_z}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(x-x_0)} + \cancelto{0}{\frac{\partial d_z}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(y-y_0)} + \frac{\partial d_z}{\partial z}\bigg|_{\mathbf{p}_0}(z-z_0) = \\ & \left(\cancelto{0}{\frac{3\mu z^2}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{5}{2}}}} - \frac{\mu}{\left[(r_t+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right)\bigg|_{\mathbf{p}_0}(z-z_0) = \\ & -\frac{\mu}{r_t^3}z = -n^2 z. \end{aligned} \tag{I.23}$$

Ou seja, resumidamente, a aproximação fica

$$\begin{cases} d_x = -\frac{\mu}{r_c^3}(r_t+x) \approx -\frac{\mu}{r_t^3}(r_t-2x) = -n^2(r_t-2x) \\ d_y = -\frac{\mu}{r_c^3}y \approx -\frac{\mu}{r_t^3}y = -n^2 y \\ d_z = -\frac{\mu}{r_c^3}z \approx -\frac{\mu}{r_t^3}z = -n^2 z \end{cases} . \tag{I.24}$$

Assim, a linearização do sistema de equações (I.20) pode ser expressa por

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + n^2 z = 0 \end{cases} . \tag{I.25}$$