

## Sinais e Sistemas – síntese analítica

Pedro M. Q. Aguiar

Março, 2021

### Capítulo 1 — Conceitos Básicos de Sinais e Sistemas

Conceitos de **senal de tempo contínuo**,  $x(t) \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e de **senal de tempo discreto**,  $x(n) \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Energia** de um sinal:

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2.$$

**Potência** (média) de um sinal:

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2.$$

Classificação de sinais em: i) energia finita, ii) energia infinita e potência finita ou iii) potência infinita.

**Transformações da variável independente:** deslocamento, escalamento, inversão.

Escalamento de sinais de tempo discreto; não se pode inverter – perda de informação.

**Sinais pares e ímpares.** Parte par e parte ímpar de um sinal.

**Sinais hermiteanos e anti-hermiteanos.** Parte hermiteana e parte anti-hermiteana de um sinal.

**Sinais periódicos.** Tempo contínuo e tempo discreto. Período fundamental.

#### Sinal sinusoidal

De tempo contínuo:  $x(t) = \sin(\omega t)$ ,  $\omega > 0$ . Quanto maior a frequência  $\omega$ , maior é a rapidez de oscilação.

Período fundamental  $T_0 = 2\pi/\omega$ .

De tempo discreto:  $x(n) = \sin(\omega n)$ ,  $\omega > 0$ . Rapidez de oscilação não aumenta monotonicamente com  $\omega$  (basta considerar uma banda de frequências fundamental); o sinal pode até não ser periódico.

Período fundamental  $N_0 =$  menor múltiplo inteiro de  $2\pi/\omega$ .

#### Sinal exponencial

Exponencial real de tempo contínuo:  $x(t) = e^{rt}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

Exponencial complexa com expoente imaginário puro:  $x(t) = e^{j\omega t}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Período fundamental  $T_0 = 2\pi/|\omega|$ .

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t).$$

Sinais reais (sinusoidais) escritos como combinações lineares de exponenciais complexas:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}, \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}.$$

Exponencial complexa no caso geral:  $x(t) = e^{st}$ ,  $s \in \mathbb{C}$ .

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + j e^{\sigma t} \sin(\omega t).$$

Exponencial de tempo discreto:  $x(n) = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Casos em que a base é: (i) real (positiva, negativa, etc), (ii) complexa de módulo unitário e (iii) complexa no caso geral:

$$x(n) = z^n = (\rho e^{j\omega})^n = \rho^n e^{j\omega n}.$$

#### Impulso e degrau unitários de tempo discreto

Impulso unitário  $\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0. \end{cases}$

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n) = x(0).$$

$$x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)\delta(n - n_0), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0).$$

Sinal arbitrário como soma de impulsos deslocados:  $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k)$ .

$$\text{Degrau unitário } u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0. \end{cases}$$

Primeira diferença / acumulação (equivalentes discretos de derivada / primitiva):

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1), \quad u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m).$$

Degrau como soma de impulsos deslocados:  $u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n - k)$ .

### **Impulso e de grau unitários de tempo contínuo**

$$\text{Degrau unitário } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Conceito de impulso unitário:  $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = u'(t)$ ,  $u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$ ,  $\delta_{\Delta}(t) = u'_{\Delta}(t)$ ,  $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$ .

$\delta(t)$  é assim nulo, excepto na origem, onde é infinito. A sua área é unitária. Representação gráfica.

Analogamente ao tempo discreto, o de grau unitário é o integral do impulso unitário:  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ .

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0).$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0).$$

Sinal arbitrário como “combinação linear” de impulsos deslocados:  $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma)\delta(t - \sigma) d\sigma$ .

Derivadas de funções descontínuas.

### **Sistemas**

Conceito de sistema de tempo contínuo  $x(t) \rightarrow y(t)$  e sistema de tempo discreto  $x(n) \rightarrow y(n)$ . Relação entrada – saída.

Interligação de sistemas e diagramas de blocos: série, paralelo e de realimentação.

### **Propriedades de sistemas**

Memória.

Causalidade.

Invariância.

Estabilidade.

Linearidade. Aditividade, homogeneidade, sobreposição.

Invertibilidade. Injectividade, sistema inverso.

## **Capítulo 2 — Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo**

### **SLITs de tempo discreto**

Representação de um sinal de tempo discreto como combinação linear de impulsos:  $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k)$ .

Resposta ao impulso unitário:  $\delta(n) \rightarrow h(n)$ .

Convolução de tempo discreto:  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k) = x(n) * h(n)$ .

Obviamente,  $\delta(n) * h(n) = h(n)$ , já que a resposta do SLIT a  $\delta(n)$  é  $h(n)$ . Assim,  $\delta(n)$  é o elemento neutro da convolução. Tem-se também imediatamente  $\delta(n - n_0) * h(n) = h(n - n_0)$ , já que o sistema é invariante no tempo.

## SLITs de tempo contínuo

Representação de sinais de tempo contínuo em termos de impulsos:

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta, \quad x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau.$$

Resposta ao impulso unitário:  $\delta(t) \rightarrow h(t)$ .

Convolução de tempo contínuo:  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$ .

Tal como para o tempo discreto,  $\delta(t) * h(t) = h(t)$  e  $\delta(t-t_0) * h(t) = h(t-t_0)$ .

### Propriedades da convolução

Comutatividade.

Distributividade.

Associatividade.

**Propriedades de SLITs** (enunciadas para tempo discreto mas iguais para tempo contínuo.)

Obviamente, as propriedades de um SLIT estão “codificadas” na sua resposta ao impulso unitário, já que esta o descreve.

Memória.  $h(n) = K\delta(n)$ .

Causalidade.  $h(n) = 0, n < 0$ .

Estabilidade.  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ .

Invertibilidade. O inverso, se existir, é SLIT e  $h(n) * h_I(N) = \delta(n)$ .

### Representação de SLITs de tempo contínuo por equações diferenciais

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Condições adicionais. Repouso inicial  $\iff$  causalidade.

### Representação de SLITs de tempo discreto por equações às diferenças

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Condições adicionais. Repouso inicial  $\iff$  causalidade (se  $a_0 \neq 0$ ).

Resolução recursiva.

### Derivadas do impulso unitário

Definição operacional do impulso unitário:  $\delta(t) * x(t) = x(t)$ . Todas as características do impulso vêm desta definição.

Exemplos:

$$x(t) = 1 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1, \quad x(t) = g(-t) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau) d\tau = g(0).$$

Definição operacional da derivada do impulso:  $\delta'(t) * x(t) = x'(t)$ .

$$x(t) = 1 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau) d\tau = 0, \quad x(t) = g(-t) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta'(\tau) d\tau = -g'(0).$$

Em geral, definição de  $\delta^{(k)}(t) = \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$ :  $\delta^{(k)}(t) * x(t) = x^{(k)}(t)$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(\tau) d\tau = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta^{(k)}(\tau) d\tau = (-1)^k g^{(k)}(0).$$