Sinais e Sistemas – síntese analítica

Pedro M. Q. Aguiar

Abril, 2021

Capítulo 1 — Conceitos Básicos de Sinais e Sistemas

Conceitos de **sinal de tempo contínuo**, $x(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, e de **sinal de tempo discreto**, $x(n) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Energia de um sinal:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \,, \qquad E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \,.$$

Potência (média) de um sinal:

$$P_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \,, \qquad P_\infty = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \,.$$

Classificação de sinais em: i) energia finita, ii) energia infinita e potência finita ou iii) potência infinita.

Transformações da variável independente: deslocamento, escalamento, inversão.

Escalamento de sinais de tempo discreto; não se pode inverter – perda de informação.

Sinais pares e ímpares. Parte par e parte ímpar de um sinal.

Sinais hermiteanos e anti-hermiteanos. Parte hermiteana e parte anti-hermiteana de um sinal.

Sinais periódicos. Tempo contínuo e tempo discreto. Período fundamental.

Sinal sinusoidal

De tempo contínuo: $x(t) = \sin(\omega t)$, $\omega > 0$. Quanto maior a frequência ω, maior é a rapidez de oscilação.

Período fundamental $T_0 = 2\pi/\omega$.

De tempo discreto: $x(n) = \sin(\omega n)$, $\omega > 0$. Rapidez de oscilação não aumenta monotonicamente com ω (basta considerar uma banda de frequências fundamental); o sinal pode até não ser periódico.

Período fundamental N_0 = menor múltiplo inteiro de $2\pi/\omega$.

Sinal exponencial

Exponencial real de tempo contínuo: $x(t) = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$.

Exponencial complexa com expoente imaginário puro: $x(t) = e^{j\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Período fundamental $T_0 = 2\pi/|\omega|$.

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \,.$$

Sinais reais (sinusoidais) escritos como combinações lineares de exponenciais complexas:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} \,, \qquad \sin(\omega t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} \,.$$

Exponencial complexa no caso geral: $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$.

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + j e^{\sigma t} \sin(\omega t) \,.$$

Exponencial de tempo discreto: $x(n) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Casos em que a base é: (i) real (positiva, negativa, etc), (ii) complexa de módulo unitário e (iii) complexa no caso geral:

$$x(n) = z^n = (\rho e^{j\omega})^n = \rho^n e^{j\omega n} \,.$$

Impulso e degrau unitários de tempo discreto

Impulso unitário $\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \,. \end{cases}$

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n) \,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n) = x(0) \,.$$

$$x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\delta(n-n_0)\,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\,.$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\,.$$

Degrau unitário $u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0\,. \end{cases}$

Primeira diferença / acumulação (equivalentes discretos de derivada / primitva):

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)\,, \qquad u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)\,.$$

Impulso e degrau unitários de tempo contínuo

Degrau unitário $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0\,. \end{cases}$

Conceito de impulso unitário: $\delta(t) = \dfrac{d\,u(t)}{dt} = u'(t)\,,\ \ u(t) = \lim\limits_{\Delta\to 0} u_\Delta(t)\,,\ \ \delta_\Delta(t) = u'_\Delta(t)\,,\ \ \delta(t) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t)\,.$

$\delta(t)$ é assim nulo, excepto na origem, onde é infinito. A sua área é unitária.

Analogamente ao tempo discreto, o degrau unitário é o integral do impulso unitário: $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$.

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0)\,.$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\,.$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)\,d\sigma\,.$$

Derivadas de funções descontínuas.

Sistemas

Conceito de sistema de tempo contínuo $x(t) \to y(t)$ e sistema de tempo discreto $x(n) \to y(n)$. Relação entrada – saída.

Interligação de sistemas e diagramas de blocos: série, paralelo e de realimentação.

Propriedades de sistemas

Memória.

Causalidade.

Invariância.

Estabilidade.

Linearidade. Aditividade, homogeneidade, sobreposição.

Invertibilidade. Injectividade, sistema inverso.

Capítulo 2 — Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

SLITs de tempo discreto

Resposta ao impulso unitário: $\delta(n) \to h(n)$.

Convolução de tempo discreto: $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$.

Obviamente, $\delta(n) * h(n) = h(n)$, já que a resposta do SLIT a $\delta(n)$ é $h(n)$. Assim, $\delta(n)$ é o elemento neutro da convolução. Tem-se também imediatamente $\delta(n-n_0) * h(n) = h(n-n_0)$, já que o sistema é invariante no tempo.

SLITs de tempo contínuo

Resposta ao impulso unitário: $\delta(t) \to h(t)$.

Convolução de tempo contínuo: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$.

Tal como para o tempo discreto, $\delta(t) * h(t) = h(t)$ e $\delta(t-t_0) * h(t) = h(t-t_0)$.

Propriedades da convolução

Comutatividade.

Distributividade.

Associatividade.

Propriedades de SLITs (enunciadas para tempo discreto mas iguais para tempo contínuo.)

Obviamente, as propriedades de um SLIT estão "codificadas" na sua resposta ao impulso unitário, já que esta o descreve.

Memória. $h(n) = K\delta(n)$.

Causalidade. $h(n) = 0$, $n < 0$.

Estabilidade. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$.

Invertibilidade. O inverso, se existir, é SLIT e $h(n) * h_I(N) = \delta(n)$.

Representação de SLITs de tempo contínuo por equações diferenciais

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Condições adicionais. Repouso inicial $\Longleftrightarrow$ causalidade.

Representação de SLITs de tempo discreto por equações às diferenças

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Condições adicionais. Repouso inicial $\Longleftrightarrow$ causalidade (se $a_0 \neq 0$).

Resolução recursiva.

Derivadas do impulso unitário

Definição operacional do impulso unitário: $\delta(t) * x(t) = x(t)$. Todas as características do impulso vêm desta definição. Exemplos:

$$x(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1\,, \qquad\qquad x(t) = g(-t) \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)\, d\tau = g(0)\,.$$

Definição operacional da derivada do impulso: $\delta'(t) * x(t) = x'(t)$.

$$x(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau)\, d\tau = 0\,, \qquad\qquad x(t) = g(-t) \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta'(\tau)\, d\tau = -g'(0)\,.$$

Em geral, definição de $\delta^{(k)}(t) = \dfrac{d^k \delta(t)}{dt^k}$: $\delta^{(k)}(t) * x(t) = x^{(k)}(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(\tau)\, d\tau = 0\,, \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta^{(k)}(\tau)\, d\tau = (-1)^k g^{(k)}(0)\,.$$

Capítulo 3 — Série de Fourier

As exponenciais como funções próprias dos SLITs:

$$e^{st} \to H(s)e^{st}\,, \qquad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau\,.$$

Combinações lineares de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas, $\{e^{jk\omega_0 t}, -\infty < k < +\infty\}$.

Série de Fourier de $x(t)$, periódico de periodo fundamental T, **frequência fundamental** $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} .$$

Notação $x(t) \leftrightarrow a_k$, onde a_k são os **coeficientes** da SF.

Exemplos que já conhecemos: $\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow a_{-1} = a_1 = 1/2$ e $\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow a_{-1} = -1/2j,\, a_1 = 1/2j\,.$

Série de Fourier de sinais reais (é fácil ver que $a_{-k} = a_k^*$): $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$, onde $a_k = A_k e^{j\theta_k}$.

a_0 é o valor médio.

Os termos com frequência ω_0 ($k = -1, 1$) são designados por primeira harmónica ou componente fundamental.

Os termos com frequência $N\omega_0$ ($k = -N, N$) são designados por N-ésima harmónica.

Cálculo dos coeficientes da Série de Fourier, $a_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt$.

Exemplo: Ex. 3.5 (impulso rectangular periódico de período T):

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & \tau/2 < |t| < T/2 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad a_0 = \frac{\tau}{T}\,, \quad a_k = \frac{\sin(k\pi\tau/T)}{k\pi}\,,\ k \neq 0\,.$$

Propriedades da SF

Linearidade.

Deslocamento.

Simetria: $x^*(t) \leftrightarrow a_{-k}^*$. Para $x(t)$ real, a_k é hermiteano.

Inversão: $x(-t) \leftrightarrow a_{-k}$. Para $x(t)$ par, a_k é par. Para $x(t)$ ímpar, a_k é ímpar.

Para $x(t)$ real e par, a_k é real (e par). Para $x(t)$ real e ímpar, a_k é imaginário puro (e ímpar).

Relação de Parseval, $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$.

Outras propriedades que decorrem das da transformada de Fourier.

Filtragem de sinais periódicos

Sinal períodico com SF à entrada de um SLIT origina saída periódica com SF imediata:

$$x(t) \leftrightarrow a_k\,, \qquad y(t) \leftrightarrow b_k\,, \qquad b_k = a_k H(jk\omega_0)\,.$$

Conceito de **resposta em frequência** dum sistema, $H(j\omega)$.

$H(j\omega)$ é (obviamente) determinado por $h(t)$.

O efeito do SLIT é então modificar cada um dos coeficientes da SF, processo que habitualmente se chama de **filtragem**.

A resposta de um sistema real a um sinal sinusoidal é também um sinal sinusoidal, de igual frequência, com amplitude e fase na origem determinadas pela resposta em frequência: $x(t) = \cos(\omega_0 t) \to y(t) = |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$.

Conceitos de **filtros passa-baixo, passa-banda e passa-alto** ideais.

Convergência da Série de Fourier

Condições suficientes para convergência (garantem que o erro tem energia nula):
– Energia finita num período.
– Número finito de impulsos e derivadas de impulsos, de qualquer ordem, num período.

Sinal com descontinuidades: fenómeno de Gibbs.

Condições de Dirichlet (garantem que converge pontualmente para o sinal e, nas descontinuidades, para o valor médio):
– Absolutamente integrável num período.
– Número finito de máximos e mínimos num período.
– Número finito de descontinuidades num período.

Capítulo 4 — Transformada de Fourier de sinais de tempo contínuo

Derivação da transformada de Fourier

Definição de TF (expressão de análise): $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$.

TF inversa (expressão de síntese): $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$.

Notação $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$.

Ex. 4.4: $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \;\leftrightarrow\; X(j\omega) = 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$.

Ex. 4.1: $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0 \leftrightarrow X(j\omega) = 1/(j\omega + a)$.

Ex. 4.2: $x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(j\omega) = 1$.

Propriedades da TF

Convolução.

Ferramenta que facilita a análise de SLITs quanto a invertibilidade: $h(t) * h_I(t) = \delta(t) \iff H(j\omega)H_I(j\omega) = 1$. Assim, um SLIT com resposta em frequência $H(j\omega)$ só é invertível se $H(j\omega) \neq 0, \forall_\omega$. Neste caso, o SLIT inverso tem resposta em frequência $H_I(j\omega) = 1/H(j\omega)$.

Ex. 4.5 (reposta ao impulso do filtro passa-baixo ideal): $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \quad\longleftrightarrow\quad X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$.

Linearidade.

Dualidade: se $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = f(\omega)$, então $f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$.

Produto: $x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$. Ex. 4.21 (modulação) e 4.22 (desmodulação síncrona).

Deslocamento no tempo e na frequência.

Escalamento no tempo e na frequência.

Diferenciação. Diferenciação na frequência. Exemplo: $te^{-at}u(t), a > 0 \quad\leftrightarrow\quad 1/(j\omega + a)^2$.

Primitiva.

Simetria: $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$. A TF de um sinal real é hermiteana, a de um sinal real par é real par e a de um sinal real ímpar é imaginária pura e ímpar.

Relação de Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$. Energia numa banda. Densidade espectral de energia.

TF de sinais periódicos

$x(t)$ periódico de frequência fundamental ω_0 e SF com coeficientes a_k tem TF

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)\,.$$

Assim, é natural que as propriedades da SF sejam análogas às da TF, tendo-se, por ex, $x'(t) \leftrightarrow jk\omega_0 a_k$, $x(t)y(t) \leftrightarrow a_k * b_k$.

Condições de convergência da TF

Condições suficientes para convergência (garantem que o erro tem energia nula):
– Energia finita.
– Número finito de impulsos e derivadas de impulsos, de qualquer ordem, em qualquer intervalo limitado.

Condições de Dirichlet (garantem que converge pontualmente para o sinal e, nas descontinuidades, para o valor médio):
– Absolutamente integrável.
– Número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo limitado.
– Número finito de descontinuidades em qualquer intervalo limitado.

Assim, qualquer SLIT estável tem resposta em frequência.

Sistemas caracterizados por equações diferenciais. Resposta em frequência.

Transformadas racionais e sua inversão por decomposição em fracções simples.

Capítulo 5 — Transformada de Fourier de sinais de tempo discreto

Derivação da Transformada de Fourier

A TF de um sinal $x(n)$ de tempo discreto é: $X(e^{j\omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$.

A TF inversa é: $x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$.

Notação: $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$.

Ex. 5.1: $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1 \;\leftrightarrow\; X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$.

Ex. 5.4: $x(n) = \delta(n) \;\leftrightarrow\; X(e^{j\omega}) = 1$.

Propriedades da TF

Periodicidade (de período 2π). Costuma designar-se o intervalo $]-\pi, \pi]$ por **banda de frequências fundamental**.

Outros exemplos: $\cos(\omega_0 n)$, $\sin(\omega_0 n)$.

Convolução. Conceito de resposta em frequência de um SLIT de tempo discreto. Conceito de filtro discreto passa-baixo, passa-alto e passa-banda ideais.

Linearidade.

Deslocamento.

Produto: $x(n)y(n) \;\leftrightarrow\; \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$ (convolução periódica).

Diferenciação na frequência: $nx(n) \;\leftrightarrow\; j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$. Exemplo: $(n+1)a^n u(n)$, $|a| < 1 \;\leftrightarrow 1/(1 - ae^{-j\omega})^2$.

Simetria. Sinais reais, pares, impares, reais pares, reais ímpares.

Relação de Parseval: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$.

Condições de convergência da TF. Condição suficiente: energia finita.

Assim, qualquer SLIT estável tem resposta em frequência.

Sistemas caracterizados por equações às diferenças. Resposta em frequência.

Transformadas racionais em $e^{-j\omega}$ e sua inversão por decomposição em fracções simples.

Capítulo 7 — Amostragem

Sinal original de tempo contínuo: $x_c(t)$.

Amostragem: $x_d(n) = x_c(nT)$, onde T é o período de amostragem.

Amostragem por trens de impulsos

Trem de impulsos: $p(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$.

Sinal com impulsos de áreas dadas pelas amostras: $x_p(t) = x_c(t)p(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$.

$x_c(t) \leftrightarrow X_c(j\omega)$.

SF do trem de impulsos: frequência fundamental $\omega_s = 2\pi/T$ (frequência de amostragem), coeficientes $a_k = 1/T$.

TF do trem de impulsos $P(j\omega) = \dfrac{2\pi}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$.

Espectro de $x_p(t)$: $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$.

Amostragem propriamente dita

Espectro de $x_d(n)$: $X_d(e^{j\Omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$.

O espectro de $x_p(t)$ pode ser escrito como $X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$. Assim, é imediato que $X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$.

Reconstrução ideal

Conversão de $x_d(n)$ para trem de impulsos $x_p(t)$.

Filtragem: $X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_p(j\omega)$.

Se $x_c(t)$ fôr de banda limitada a ω_M e $\omega_s > 2\omega_M$, é fácil reconstruir, *i.e.*, obter $x_r(t) = x(t)$. Basta usar um filtro reconstrutor $H_r(j\omega)$ passa-baixo ideal de ganho T e frequência de corte $\omega_s/2$, o que faz com que $X_r(j\omega) = X_c(j\omega)$.

Teorema da amostragem: $x_c(t) \leftrightarrow X_c(j\omega)$, com $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. $x_c(t)$ é determinado por $x_c(nT)$ se $\omega_s > 2\omega_M$, onde $\omega_s = 2\pi/T$.

Processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo

Nas condições do teorema da amostragem, o sistema de tempo contínuo é SLIT, com resposta em frequência:

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \,. \end{cases}$$

Sub-amostragem – aliasing

Conceito de aliasing. Filtro anti-aliasing.

Reconstrução com retentor de ordem zero

Para reconstruir, pode-se passar por um retentor de ordem 0.

A passagem de $x_d(n)$ para $x_0(t)$ (resultado do retentor de ordem 0) pode ser escrita como $x_0(t) = x_p(t) * h_0(t)$.

Na frequência, $X_0(j\omega) = X_p(j\omega)H_0(j\omega)$.

Tem que se usar um filtro $H_{r0}(j\omega)$ que reconstrua $x_c(t)$ a partir de $x_0(t)$:

$X_0(j\omega)H_{r0}(j\omega) = X_c(j\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad X_p(j\omega)H_0(j\omega)H_{r0}(j\omega) = X_c(j\omega)$.

Nas condições do teorema de amostragem, basta que $H_0(j\omega)H_{r0}(j\omega) = H_r(j\omega)$.

$h_0(t) \quad \longleftrightarrow \quad H_0(j\omega) = \dfrac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}e^{-j\omega T/2}$.

Como $H_0(j\omega)$ não se anula na região onde $H_r(j\omega)$ é diferente de zero, há solução: $H_{r0}(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega T}{2\sin(\omega T/2)}e^{j\omega T/2} & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$

Interpolação. Reconstrução ideal como interpolação com $h_r(t) = \dfrac{\sin(\frac{\omega_s}{2}t)}{\frac{\omega_s}{2}t} \longleftrightarrow H_r(j\omega)$.

Capítulo 9 — Transformada de Laplace

Definição da tranformada de Laplace: $X(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$.

É imediato que $\mathrm{TF}\{x(t)\} = X(s)|_{s=j\omega}$.

Interpretação como uma TF: $X(s) = X(\sigma + j\omega) = \mathrm{TF}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$.

Ex. 9.1: $x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(s) = 1/(s+a)$, $\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$.

Ex. 9.1: $x(t) = -e^{-at}u(-t) \leftrightarrow X(s) = 1/(s+a)$, $\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$.

Notação: $x(t) \leftrightarrow X(s)$, RC.

Transformada racionais. Definição de **pólos** e **zeros**.

A TL é absolutamente convergente e analítica no interior da RC.

Propriedades da região de convergência

As RCs consistem em faixas verticais.

As RCs não contêm pólos.

Para sinais de duração finita a RC é todo o plano.

Para sinais unilaterais direitos, a RC é um semi-plano direito.

Para sinais unilaterais esquerdos, a RC é um semi-plano esquerdo.

Para sinais bilaterais, a RC é uma faixa.

As RCs de TL racionais são limitadas por pólos.

Para sinais unilaterais direitos com TL racional, a RC é um semi-plano direito limitado pelo pólo mais à direita.

Para sinais unilaterais esquerdos com TL racional, a RC é um semi-plano esquerdo limitado pelo pólo mais à esquerda.

Estabilidade e causalidade de SLITs com função de transferência racional

Chama-se **função de transferência** à TL da resposta ao impulso unitário $h(t) \leftrightarrow H(s)$, RC.

Para $H(s)$ racional, a causalidade e estabilidade são imediatas a partir unicamente da sua RC:
– SLIT é causal se e só se a RC é um semi-plano direito.
– SLIT é estável se e só se a RC contém o eixo imaginário e o número de zeros não é superior ao número de pólos.

Propriedades da TL

Convolução. $\mathrm{RC}_Y \supset \{\mathrm{RC}_X \cap \mathrm{RC}_H\}$.

Linearidade. $\mathrm{RC}_Y \supset \{\mathrm{RC}_X \cap \mathrm{RC}_H\}$.

Deslocamento. $\mathrm{RC}_Y = \mathrm{RC}_X$.

Deslocamento no plano s. $\quad y(t) = e^{s_0 t}x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(s) = X(s - s_0)\,, \quad \mathrm{RC}_Y = \mathrm{RC}_X + \mathrm{Re}\{s_0\}$.

Escalamento. $y(t) = x(at) \longleftrightarrow Y(s) = \dfrac{1}{|a|}X\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $\mathrm{RC}_Y = a\mathrm{RC}_X$.

Para $a = -1$, uma propriedade de simetria: $y(t) = x(-t) \leftrightarrow Y(s) = X(-s)$, $\mathrm{RC}_Y = -\mathrm{RC}_X$.

Outra propredade de simetria: $y(t) = x^*(t) \leftrightarrow Y(s) = X^*(s^*)$, $\mathrm{RC}_Y = \mathrm{RC}_X$. TL de sinais reais – pólos e zeros são reais ou aos pares de complexos conjugados.

Diferenciação. $\mathrm{RC}_Y \supset \mathrm{RC}_X$.

Diferenciação no plano s. $y(t) = -tx(t) \leftrightarrow Y(s) = X'(s)$, $\mathrm{RC}_Y = \mathrm{RC}_X$.

Ex. 9.14: $\quad \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \quad \longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{(s+a)^n}\,, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$.

Integração. $\mathrm{RC}_Y \supset \{\mathrm{RC}_X \cap \mathrm{Re}\{s\} > 0\}$.

Teorema do valor inicial. Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e $x(t)$ não tem impulsos na origem, então $x(0^+) = \lim_{s \to +\infty} sX(s)$.

Teorema do valor final. Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ é finito, então $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$.

A transformada de Laplace inversa

Expressão geral: $x(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma - j\infty} X(s)e^{st}\,ds$.

TLs racionais. Determinação da TL inversa por decomposição em fracções simples.

SLITs descritos por equações diferenciais

É imediato obter a expressão da função de transferência a partir da equação diferencial e vice-versa. A RC não é determinada pela equação diferencial mas pode ser determinada por conhecimento de propriedades como causalidade ou estabilidade.

Malha de realimentação

Diagrama de blocos. Função de transferência equivalente.

Interpretação geométrica da TF a partir do diagrama de pólos e zeros

A menos de um factor de escala, a TF é dada pelo produto/quociente dos complexos representados pelos vectores que ligam os zeros/pólos a cada ponto do eixo imaginário:

$$H(s) = K\frac{\Pi_m(s - z_m)}{\Pi_n(s - p_n)}\,, \qquad |H(j\omega)| = |K|\frac{\Pi_m \rho_m}{\Pi_n \rho_n}\,, \qquad \angle H(j\omega) = \angle K + \sum_m \theta_m - \sum_n \theta_n\,.$$

Resposta em frequência – diagramas de Bode

Escala de ganho em dB: $|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$.

Para além de permitir lidar com grandes gamas dinâmicas de valores, os termos multiplicativos tornam-se aditivos:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = |K|_{\text{dB}} + \sum_m |j\omega - z_m|_{\text{dB}} - \sum_n |j\omega - p_n|_{\text{dB}} .$$

Escala de frequências logarítmica: $\log_{10}\omega$.

Para além de permitir lidar com uma grandes gama de frequências, a utilização da escala logarítmica faz com que a forma do diagrama não se altere com escalamentos na frequência e permite derivar aproximações assimptóticas muito simples.

Pólo. $H(s) = 1/(s+a)$, $a > 0$. Pólo em $s = -a < 0$. Aproximações assimptóticas:

$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = \begin{cases} -20\log_{10} a & \omega << a \\ -20\log_{10}\omega & \omega >> a\,. \end{cases}$ Ponto em que a aproximação é pior: $|H(ja)|_{\text{dB}} = -20\log_{10} a - 3$.

$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < 0.1a \\ \text{recta que une } (0.1a, 0) \text{ a } (10a, -\pi/2) & 0.1a < \omega < 10a \\ -\pi/2 & \omega > 10a\,. \end{cases}$ A aproximação é exacta em $\angle H(ja) = -\pi/4$.

Ganho. $H(s) = K$. $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|K|$, $\angle H(j\omega) = \angle K$ Para sistemas reais, $\angle K = 0$ ou $\angle K = \pi$.

Zero no s.p.c.e. $H(s) = (s+a)/a$, $a > 0$. Zero em $s = -a < 0$. Como é o inverso do caso do pólo, é imediato que os diagramas de Bode são o simétrico.

Zero no s.p.c.d. $H(s) = (s+a)/a$, $a < 0$. Zero em $s = -a > 0$. Desenhando o vector para este caso e para o anterior, fica claro que a amplitude é igual e a fase simétrica.

Zero na origem. $H(s) = s$. Zero em $s = 0$. Não há aproximação: $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\omega$, $\angle H(j\omega) = \pi/2$.

Pólos complexos conjugados.

$$H(s) = \frac{pp^*}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{|p|^2}{s^2 - 2\text{Re}\{p\}s + |p|^2} .$$

Notação para os pólos: $p, p^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, com $\omega_n > 0$ e $0 < \xi < 1$. Estes parâmetros são então $\omega_n = |p|$ e $\xi = \cos\psi$ (ψ é o menor ângulo que os pólos fazem com o eixo real).

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} .$$

Aproximações assimptóticas:

$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = \begin{cases} 0 & \omega << \omega_n \\ 40\log_{10}\omega_n - 40\log_{10}\omega & \omega >> \omega_n\,. \end{cases}$

$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < 0.1\omega_n \\ \text{recta que une } (0.1\omega_n, 0) \text{ a } (10\omega_n, -\pi) & 0.1\omega_n < \omega < 10\omega_n \\ -\pi & \omega > 10\omega_n\,. \end{cases}$

As aproximações assimptóticas não dependem de ξ, apenas de ω_n. Influência de ω_n.

Esboço do diagrama real (não aproximado).

Tem-se $H(j\omega_n) = \dfrac{1}{2\xi j}$, ou seja, $|H(j\omega_n)| = \dfrac{1}{2\xi}$ e $\angle H(j\omega_n) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Para $\xi > \sqrt{2}/2$ ($\psi < \pi/4$), os diagramas são monótonos. Influência de ξ.

Para $\xi < \sqrt{2}/2$ ($\psi > \pi/4$), o diagrama de fase é mononoto mas o de amplitude tem um pico:

$$\omega_{max} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\,, \qquad |H(j\omega_{max})| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} .$$

Influência de ξ.

Zeros complexos conjugados no s.p.c.e. Como é o inverso do caso dos pólos complexos conjugados, é imediato que os diagramas de Bode são o simétrico.

Zeros complexos conjugados no s.p.c.d. Desenhando os vectores para este caso e para o anterior, fica claro que o diagrama de amplitude é igual e que o de fase é o simétrico.

Resposta no tempo de sistemas de primeira e segunda ordem

Sistemas de primeira ordem. $H(s) = \dfrac{1/\tau}{s + 1/\tau}$. O parâmetro $\tau > 0$ é a **constante de tempo** do sistema.

Pólo: $-1/\tau$.

Resposta ao degrau: $s(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t)$. Esboço. Influência de τ.

Parâmetro relevante: **tempo de establecimento** a 5%, $t_s \simeq 3\tau$.

Sistemas de segunda ordem. $H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$. Os parâmetros $\omega_n > 0$ e $\xi > 0$ são, respectivamente, a **frequência natural** e o **coeficiente de amortecimento** do sistema.

$\forall\xi, \forall\omega_n$, usando TVI e TVF, $s(0^+) = 0$, $s(+\infty) = 1$ e $s'(0^+) = 0$ (este é diferente face ao sistema de primeira ordem).

Sistema sub-amortecido. Corresponde a $0 < \xi < 1$ (pólos complexos conjugados).

Pólos: $p, p^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1/\tau \pm j\omega_a$.

Resposta ao degrau: $s(t) = \left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-t/\tau} \sin\left(\omega_a t + \psi\right)\right] u(t)$. Esboço. Converge através de oscilações amortecidas.

Parâmetros relevantes:

Período das oscilações amortecidas, $T_a = 2\pi/\omega_a$.

Tempo de pico, $t_p = T_a/2 = \pi/\omega_a$.

Sobre-elevação, $S = \dfrac{s(t_p) - s(+\infty)}{s(+\infty)} = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = e^{-\pi\cot\psi}$.

Tempo de establecimento a $\pm 5\%$, $t_s \lesssim 3\tau$.

Em suma, a localização dos pólos determina a resposta temporal, nos seguintes moldes:

ω_n (módulo dos pólos) actua como factor de escala temporal pois $s(t)$ só depende de t e de ω_n através do produto $\omega_n t$.

ξ (que codifica o argumento dos pólos) determina o valor máximo da resposta, sendo a sobre-elevação decrescente com ξ.

τ (que codifica a parte real dos pólos) actua como constante de tempo (papel igual ao que desempenha no sistemas de primeira ordem). Essencialmente, tal como para o sistema de primeira ordem, quanto mais perto estão os pólos do eixo imaginário, mais demora a resposta a estabilizar.

ω_a (parte imaginária do pólo p) é a frequência das oscilações amortecidas.

Sistema sobre-amortecido. Corresponde a $\xi > 1$ (pólos reais).

Pólos: $p_1, p_2 = \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$. Quando $\xi \to 1$, tem-se $p_1, p_2 \to -\omega_n$; quando $\xi \to \infty$, tem-se $p_1 \to 0$ e $p_2 \to -\infty$. Esboço do diagrama de pólos com $-\xi\omega_n$.

Resposta ao degrau: $s(t) = \left[1 + \dfrac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\dfrac{1}{p_1}e^{p_1 t} - \dfrac{1}{p_2}e^{p_2 t}\right)\right] u(t)$. Esboço. O papel de ω_n continua a ser apenas escalar no tempo. Tem-se $s'(t) > 0$ para $t > 0$, pelo que $s(t)$ converge monotonamente para o ganho estático.

Parâmetro relevante: **tempo de establecimento** a 5%, $t_s \simeq 3\tau$, onde $\tau = -1/p_1$.

Sistema criticamente amortecido. Corresponde a $\xi = 1$ (pólo duplo).

Pólo duplo em $p = -\omega_n$.

Resposta ao degrau: $s(t) = \left[1 - (1 + \omega_n t)\, e^{-\omega_n t}\right] u(t)$. Esboço. Resposta monótona; ω_n é um factor de escala temporal.

Parâmetro relevante: **tempo de establecimento** a 5%, $t_s \simeq 4.8/\omega_n$.