INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DSP 11/12 — Digital Signal Processing, 2^{nd} Test and 1^{st} Exam, June 5^{th}, 2012

Test: problems **4** to **7**. Duration: 2 hours. Exam: all problems except **6**. Duration: 3 hours. Show all your work on the exam pages and make sure you justify all your answers (results that are not explained or justified may count less, even if they are correct).

1. Consider the causal LTI system for which the input $x[n]$ and the output $y[n]$ satisfy the difference equation

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]\,.$$

a) Find its system function, $H(z)$, and the corresponding region of convergence.

b) Find the output $y[n]$ when the input is the unit-step, $x[n] = u[n]$.

c) Draw the direct form II implementation of the system.

2. With the goal of analyzing a bandlimited continuous-time signal $x_c(t)$, whose highest frequency is 2KHz, we sample it, using the sampling frequency of 5KHz, obtaining $x[n]$. Then, we compute the localized FT of $x[n]$, *i.e.*, its spectrogram, as given by

$$X[n,k] = \sum_{m=0}^{99} x[n+m]e^{-j\frac{2\pi}{200}km}\,, \qquad 0 \leq k \leq 199\,.$$

a) $X[150,k]$, with $0 \leq k \leq 199$ can be seen a DFT. Of which signal?

b) For $x_c(t) = \cos(2\pi 1500 t)$, compute $X[0,k]$, $0 \leq k \leq 199$.

c) $X[n,50]$ can be seen as the output of a filter when the input is $x[n]$. Which filter?

3. We want to find the impulse response $h[n]$ of a FIR system that approximates an ideal low-pass filter with cut-off frequency $\pi/3$, using the windowing method.

a) What is the impact of the choices of the type and dimension of the window?

b) Find the FIR filter, using a 3-point rectangular window, *i.e.*, find $h[0]$, $h[1]$, and $h[2]$.

c) Find the amplitude of the output of the FIR filter when the input is sinusoidal with frequency $\pi/2$ and amplitude 1. (if you did not solve b), consider $h[0] = 2$, $h[1] = 1$, and $h[2] = 2$.)

4. To estimate the parameter A from the observation of a signal

$$x[n] = An + w[n]\,, \quad 0 \le n \le 4\,,$$

where w is zero mean white Gaussian noise (WGN) with unitary variance, we propose the estimators

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{10}x[1] + \frac{1}{5}x[3]\,, \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{6}\left(x[0] + x[2] + x[4]\right)\,.$$

a) Which estimator is better in terms of bias?

b) Which estimator is better in terms of mean square error (MSE)?

(if any of the choices above depends on the actual value of the unknown parameter A, determine which is the best estimator as a function of A.)

5. From N independent observations $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ of a Poisson random variable, *i.e.*, with

$$\mathrm{P}(g) = \frac{\lambda^g e^{-\lambda}}{g!}, \qquad g = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

we want to estimate the parameter λ (note that $\mathrm{E}\{g\} = \mathrm{Var}\{g\} = \lambda$).

a) Find the expression for the Cramer-Rao bound (CRB) for the estimation of λ.

b) Find the expression for the maximum likelihood (ML) estimate of λ.

c) Is this estimate efficient?

6. We want to use the method of least squares (LS) to find the coefficients A and B of the signal model

$$x[n] = A + B\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\,, \quad 0 \le n \le N-1\,,$$

where $N > 2$ (note that, in this case, $\sum_{n=0}^{N-1}\cos(2\pi n/N) = 0$ and $\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2(2\pi n/N) = N/2$).

a) Find the expression for the estimates of A and B.

b) Find the expression for the approximation error.

c) What happens if $N = 2$? (to make your argument crystal clear, also provide the expressions for A, B, and the approximation error in this case).

7. Consider noisy observations $x[n]$ of a known signal $s[n]$ with unknown magnitude A,

$$x[n] = As[n] + w[n]\,, \quad 0 \le n \le N-1\,,$$

where w is zero mean WGN with variance σ^2. There is the prior knowledge that A is a Gaussian random variable, $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$.

a) Find the expression for the minimum mean square error (MMSE) estimate of A. Interpret the expression in terms of the influence of $s[n], \sigma, \mu_A, \sigma_A$.

b) Find the expression for the variance of that estimate and interpret it in the same terms.

c) Find the expression for the maximum *a posteriori* (MAP) estimate of A.

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

PDS 11/12 — Processamento Digital de Sinais, 2^0 Teste e 1^0 Exame, 5 de Junho de 2012

Teste: problemas **4** a **7**. Duração: 2 horas. Exame: todos os problemas excepto **6**. Duração: 3 horas. Justifique todas as respostas.

1. Considere o SLIT causal para o qual a entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$ satisfazem a equação às diferenças

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]\,.$$

a) Determine a sua função de transferência, $H(z)$, e respectiva região de convergência.

b) Determine a saída $y[n]$ quando a entrada é o escalão unitário, $x[n] = u[n]$.

c) Represente graficamente a implemantação do sistema na forma directa II.

2. Pretende-se analisar um sinal em tempo contínuo, $x_c(t)$, de banda limitada a 2KHz. Para tal, usando a frequência de amostragem de 5KHz, amostra-se $x_c(t)$, obtendo-se $x[n]$. Em seguida, calcula-se a Transformada Localizada de Fourier de $x[n]$, *i.e.*, o espectrograma, de acordo com

$$X[n,k] = \sum_{m=0}^{99} x[n+m]e^{-j\frac{2\pi}{200}km}\,, \qquad 0 \le k \le 199\,.$$

a) $X[150,k]$, com $0 \le k \le 199$ pode ser visto como uma DFT. De que sinal?

b) Para $x_c(t) = \cos(2\pi 1500t)$, determine $X[0,k]$, $0 \le k \le 199$.

c) $X[n,50]$ pode ser visto como a saída de um filtro com entrada $x[n]$. Que filtro?

3. Pretende-se determinar a resposta impulsional $h[n]$ de um sistema FIR que aproxime um filtro passa-baixo ideal de frequência de corte $\pi/3$, usando o "método da janela" (*windowing*).

a) Qual é a influência das escolhas do tipo e dimensão da janela para este fim?

b) Dimensione o filtro FIR usando uma janela rectangular de dimensão 3, *i.e.*, determine os valores de $h[0]$, $h[1]$ e $h[2]$.

c) Determine a amplitude da saída do filtro FIR dimensionado quando a sua entrada é sinusoidal de frequência $\pi/2$ e amplitude 1. (se não resolveu b), considere $h[0] = 2$, $h[1] = 1$ e $h[2] = 2$.)

4. Para estimar o parâmetro A a partir da observação de um sinal

$$x[n] = An + w[n]\,, \quad 0 \le n \le 4\,,$$

é ruído branco gaussiano (WGN) de média nula e variância unitária, propõe-se os estimadores

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{10}x[1] + \frac{1}{5}x[3]\,, \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{6}\left(x[0] + x[2] + x[4]\right)\,.$$

a) Que estimador é melhor em termos de viés (“bias”)?

b) Que estimador é melhor em termos de erro quadrático médio (MSE)?

(se alguma das escolhas acima depender do valor real do parâmetro desconhecido A, determine qual é o melhor estimador como em função de A.)

5. A partir de N observações independentes $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ de uma variável aleatória de Poisson, *i.e.*, com

$$\mathrm{P}(g) = \frac{\lambda^g e^{-\lambda}}{g!}, \qquad g = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

pretende-se estimar o parâmetro λ (note que $\mathrm{E}\{g\} = \mathrm{Var}\{g\} = \lambda$).

a) Determine a expressão para o limiar de Cramer-Rao (CRB) para a estimação de λ.

b) Determine a expressão para o estimador de máxima verosimilhança (ML) de λ.

c) Este estimador é eficiente?

6. Pretende-se usar o método dos mínimos quadrados (LS) para determinar os coeficientes A e B no modelo de sinal

$$x[n] = A + B\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\,, \quad 0 \le n \le N-1\,,$$

onde $N > 2$ (note que, neste caso, $\sum_{n=0}^{N-1}\cos(2\pi n/N) = 0$ e $\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2(2\pi n/N) = N/2$).

a) Determine a expressão para as estimativas de A e B.

b) Determine a expressão para o erro de aproximação.

c) O que acontece se $N = 2$? (para que a explicação resulte totalmente clara, determine também as expressões para A, B e erro de aproximação neste caso).

7. Considere observações ruidosas $x[n]$ de um sinal conhecido $s[n]$ com amplificação desconhecida A,

$$x[n] = As[n] + w[n]\,, \quad 0 \le n \le N-1\,,$$

onde é ruído branco gaussiano (WGN) de média nula e variância σ^2. Há o conhecimento *a priori* de que A é uma variável aleatória gaussiana, $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$.

a) Determine a expressão para o estimador de menor erro quadrático médio (MMSE) de A. Interprete a expressão em termos da influência de $s[n], \sigma, \mu_A, \sigma_A$.

b) Determine a expressão para a variância desse estimador e interprete nos mesmos termos.

c) Determine a expressão para o estimador de máximo *a posteriori* (MAP) de A.