INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DSP 11/12 — Digital Signal Processing, 1^st Test, April 2^nd, 2012

Show all your work on the exam pages and make sure you justify all your answers (results that are not explained or justified may count less, even if they are correct). Duration: 2 hours.

1. Consider the system defined by the following input ($x[n]$) / output ($y[n]$) relation:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]\,.$$

a) Is the system linear and time-invariant (LTI)?

b) Find and sketch its frequency response (magnitude and phase).

c) Find the output $y[n]$ when the input is $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$.

2. The system function of an LTI system is

$$H(z) = \frac{-5}{1-2z^{-1}}\,, \qquad |z| < 2\,.$$

a) Is the system causal?

b) Is the system stable?

c) Find the output $y[n]$ when the input is $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$.

3. Consider an LTI system, with impulse response $h[n]$ and the input signal $x[n]$, given by

$$h[n] = \begin{cases} n & \text{if } 0 \le n \le 9 \\ 0 & \text{otherwise}\,, \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & \text{if } 0 \le n \le 49 \\ 0 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

a) Find $X[k]$, the 50-point DFT of $x[n]$, $0 \le n \le 49$.

b) Describe how the corresponding output $y[n]$ can be computed using DFTs of a size of your choice. You do not need to compute $y[n]$ (or any of the DFTs) but make sure to detail all the steps involved, motivating the choice of the DFT size, and unambiguously pointing out the sizes of all intermediate signals and transforms.

c) Repeat b), using now 20-point DFTs, and comment on the computational efficiency.

4. With the goal of analyzing a bandlimited continuous-time signal $x_c(t)$, whose highest frequency is 300Hz, we sample it, using the sampling frequency of 1KHz, obtaining $x[n]$. Then, we compute the localized FT of $x[n]$, *i.e.*, its spectrogram, as given by

$$X[n,k] = \sum_{m=0}^{99} x[n+m]e^{-j\frac{2\pi}{100}km}\,, \qquad 0 \le k \le 99\,.$$

a) To what continuous-time instant t does the index $n = 2000$ in $X[n,k]$ correspond?

b) To what frequency f (in Hz, *i.e.*, in continuous-time) does the index $k = 8$ in $X[n,k]$ correspond?

c) For the following signal, find the spectrogram $X[n,k]$ and interpret the result:

$$x_c(t) = \cos(2\pi 150t) + u(t)\,.$$

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

PDS 11/12 — Processamento Digital de Sinais, 1º Teste, 2 de Abril de 2012

Justifique todas as respostas. Duração: 2 horas.

1. Considere o sistema definido pela seguinte relação entrada ($x[n]$) / saída ($y[n]$):

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]\,.$$

a) O sistema é linear e invariante no tempo (SLIT)?

b) Determine e esboce a sua resposta em frequência (amplitude e fase).

c) Determine a saída $y[n]$ quando a entrada é $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$.

2. A função de transferência de um SLIT é

$$H(z) = \frac{-5}{1-2z^{-1}}\,, \qquad |z| < 2\,.$$

a) O sistema é causal?

b) O sistema é estável?

c) Determine a saída $y[n]$ quando a entrada é $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$.

3. Considere um SLIT com resposta impulsional $h[n]$ e o sinal de entrada $x[n]$, dados por

$$h[n] = \begin{cases} n & \text{se } 0 \le n \le 9 \\ 0 & \text{caso contrário}\,, \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & \text{se } 0 \le n \le 49 \\ 0 & \text{caso contrário}\,. \end{cases}$$

a) Determine $X[k]$, a DFT de dimensão 50 de $x[n]$, $0 \le n \le 49$.

b) Descreva como determinar a saída $y[n]$ usando DFTs de dimensão à sua escolha. Não se pretende que determine $y[n]$ (or qualquer das DFTs) mas detalhe todos os passos envolvidos, justificando a escolha da dimensão da DFT e indicando as dimensões de todos os sinais e transformadas intermédios.

c) Repita b), usando DFTs de dimensão 20. Comente no que diz respeito à eficiência computacional.

4. Pretende-se analisar um sinal em tempo contínuo, $x_c(t)$, de banda limitada a 300Hz. Para tal, usando a frequência de amostragem de 1KHz, amostra-se $x_c(t)$, obtendo-se $x[n]$. Em seguida, calcula-se a Transformada Localizada de Fourier de $x[n]$, *i.e.*, o espectrograma, de acordo com

$$X[n,k] = \sum_{m=0}^{99} x[n+m] e^{-j\frac{2\pi}{100}km}\,, \qquad 0 \le k \le 99\,.$$

a) A que instante de tempo contínuo t corresponde o índice $n = 2000$ em $X[n,k]$?

b) A que frequência f (em Hz, *i.e.*, de tempo contínuo), corresponde o índice $k = 8$ em $X[n,k]$?

c) Para o sinal seguinte, determine o espectrograma $X[n,k]$ e interprete o resultado:

$$x_c(t) = \cos(2\pi 150 t) + u(t)\,.$$