Sinais e Sistemas – 2º trabalho de laboratório

Série de Fourier e transformada de Fourier

# 1 Introdução

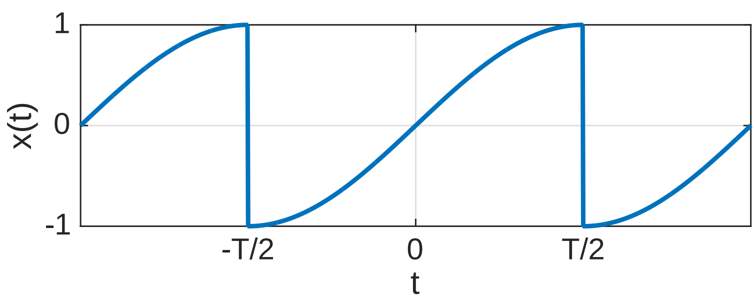
Neste trabalho irá lidar com representações de sinais por meio da Série de Fourier e da Transformada de Fourier, com o fim de adquirir alguma intuição sobre o significado das representações de sinais em frequência.

Preparação Prévia

# 2 Sinais periódicos

Nesta parte do trabalho ir-se-á sintetizar um sinal periódico a partir da sua representação em série de Fourier.

Considere a onda descrita pelo sinal $x(t)$ parcialmente representado na figura seguinte.




O sinal $x(t)$ é periódico de período $T$, sendo exactamente uma sinusóide para $t \in (-T/2, T/2)$ . Naturalmente, este sinal pode ser representado pela série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}. \tag{1}$$

1. Determine a expressão dos coeficientes $a_k$ da série de Fourier do sinal $x(t)$ representado na figura. Note que pode obter a expressão de $a_k$ usando propriedades conhecidas dos coeficientes da série de Fourier ou directamente a sua definição.

Iremos considerar aproximações desta série dadas pela série truncada

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \, e^{jk\omega_0 t}, \tag{2}$$

para vários valores de $N$. Sendo $x(t)$ real, esta série pode ser escrita como uma soma de sinusóides, *i.e.*,

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \, \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \tag{3}$$

onde $A_k \in [0, +\infty)$ e $\varphi_k \in (-\pi, \pi]$.

2 Determine as expressões dos coeficientes $A_k$ e $\varphi_k$. Para isso, agrupe o termo de ordem $k$ com o de ordem $-k$ na expressão (2). Calcule o valor dos coeficientes pedidos no formulário electrónico.

## 3 Resposta em frequência e resposta ao impulso unitário

No laboratório ir-se-á determinar experimentalmente a resposta em frequência dum sistema linear invariante no tempo (SLIT).

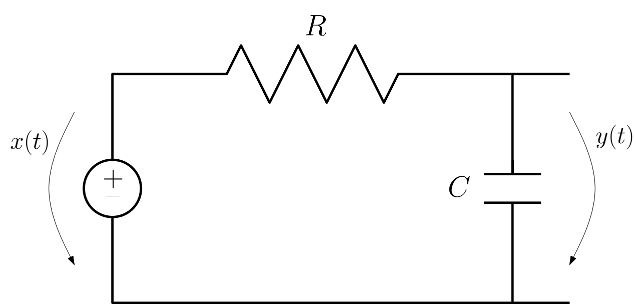
Como sabe, a resposta em frequência dum SLIT, $H(j\omega)$, pode ser interpretada como sendo o "ganho" que o sistema apresenta para a frequência $\omega$. Esta interpretação traduz o facto de que, colocando à entrada do sistema o sinal $e^{j\omega t}$, se obtém à saída o sinal $H(j\omega)\, e^{j\omega t}$.

Para determinar experimentalmente $H(j\omega)$, poder-se-ia pensar em colocar à entrada do sistema, sucessivamente, sinais $e^{j\omega t}$ com diferentes valores de $\omega$, e em medir as amplitudes e as fases dos correspondentes sinais de saída. Embora esta forma de proceder pudesse, de facto, ser usada numa simulação em computador, na realidade tal procedimento não seria viável, porque os sinais e os sistemas que são normalmente usados na prática são reais. Os sistemas só aceitam entradas reais e só produzem saídas reais, e portanto não permitem usar o sinal $e^{j\omega t}$ como entrada. Por esse motivo, é necessário proceder-se duma forma um pouco diferente da indicada acima. As questões seguintes estabelecem os factos fundamentais que permitem medir a resposta em frequência dum sistema real (a qual toma, geralmente, valores complexos) usando apenas sinais reais.

1. Considere um SLIT real (isto é, um SLIT que apenas aceita entradas reais e que apenas produz saídas reais) com resposta em frequência $H(j\omega)$. Admita que a sua entrada é $x(t) = \cos(\omega t)$. Mostre que a sua saída pode ser expressa na forma $y(t) = A(\omega)\cos\left[\omega t + \varphi(\omega)\right]$, com $A(\omega)$ real não negativo e $\varphi(\omega)$ real. Indique as expressões de $A(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ em função de $H(j\omega)$.

2. Admita que está a trabalhar com um SLIT real. Indique, com base nos resultados do ponto anterior, que sinal de entrada deve usar, que valores deve medir experimentalmente, e que cálculos deve efectuar sobre esses valores, para determinar o módulo e o argumento da resposta em frequência do sistema, $H(j\omega)$, para um dado valor de $\omega$.

3. Considere o circuito RC da figura seguinte. Determine, em função de R e C, as expressões da resposta em frequência do circuito, $H(j\omega)$, bem como do seu módulo e argumento. Indique o esboço de $|H(j\omega)|$.




4. Determine, em função de R e C, a resposta do circuito ao impulso unitário. Indique o seu esboço.

## Trabalho Experimental

# 4 Inicialização

Para iniciar o seu trabalho, proceda da seguinte forma:

- Abra a pasta `LabSS`, que deverá estar localizada no "Desktop" do computador. Dentro desta pasta, abra a pasta `WinPython-32bit-3.3.3.3`.
- Faça duplo clique no ficheiro `Spyder` (ou `Spyder.exe`). Não confunda com o ficheiro `Spyder (light)`, que não é o que se pretende utilizar.
- Ao fim de algum tempo, deverá aparecer uma janela com o título "Spyder (Python 3.3)".
- Ao fim de mais algum tempo, deverá aparecer nessa janela algum texto, que termina numa linha com "In [1]:".
- Introduza, nessa linha, a instrução `run -i lab2` seguida de "Enter" (mudança de linha), para preparar o sistema para a realização do 2º trabalho de laboratório.
- Deverá aparecer o texto "Sinais e Sistemas - 2º trabalho de laboratório: inicialização concluída.", seguido duma linha com "In [2]:".
- O sistema está pronto para a realização do trabalho. Deverá proceder como se indica nas secções seguintes.

# 5 Sinais periódicos

Nesta parte do trabalho ir-se-á sintetizar um sinal periódico a partir da sua representação em série de Fourier. Pretende-se aproximar a onda considerada na Preparação Prévia, com período $T = 1$. A aproximação irá ser obtida por meio da série truncada

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \tag{4}$$

1. Usando os valores dos coeficientes $A_k$ e $\varphi_k$ determinados na Preparação Prévia, crie os sinais $x_N(t)$, com $t$ no intervalo $[-3, 3]$, para $N = 1, 2, 3, \dots 7$.

   *Nota: A variável* `pi` *contém o valor* $\pi$. *Em Python, a potência* $a^b$ *escreve-se* `a**b`.

2. Visualize os sinais $x_N(t)$ sobrepostos no mesmo gráfico (para traçar vários gráficos sobrepostos, dê os correspondentes comandos `tplot` seguidos, sem fechar a janela onde aparecem os gráficos). Se asssim o entender, faça zoom para poder observar em detalhe as formas de onda. Comente.

3. Indique o gráfico das formas de onda de $x_1(t), x_2(t)$ e $x_7(t)$.

# 6 Determinação experimental das respostas em frequência e ao impulso unitário

Nesta parte do trabalho ir-se-á determinar experimentalmente o módulo da resposta em frequência dum sistema linear invariante no tempo (SLIT), usando o método desenvolvido na Secção 3 da Preparação Prévia.

Comece por gerar uma variável de tempo com a duração de 20 segundos, com a instrução `t = timevar(20)`. Em seguida deverá realizar repetidamente a sequência de passos indicada a seguir, de forma a determinar valores da resposta em frequência que sejam suficientes para traçar, com boa aproximação, o gráfico do módulo dessa resposta.

- Gerar um sinal `x` apropriado.
- Dar a instrução `y = sistema1(x)`, que coloca na variável `y` a resposta do sistema ao sinal `x`.
- Efectuar medidas sobre o sinal `y`.
- Efectuar os cálculos necessários, com base nos resultados do ponto anterior, para determinar valores do módulo de $H(j\omega)$.

Note que ao gerar uma sinusóide no computador, com uma instrução do tipo `x = cos(t)`, está, de facto, a gerar uma sinusóide de duração limitada, e não uma sinusóide para $t$ a variar de $-\infty$ a $+\infty$. A resposta do sistema a uma sinusóide de duração limitada apresenta um "transitório" no início e outro no final. Para determinar características da resposta, deverá usar o intervalo de tempo em que a resposta está estável, isto é, depois de o transitório inicial já se ter desvanecido e antes de o transitório final se ter iniciado.

Para determinar valores num gráfico, utilize o cursor do rato em forma de seta (se o cursor estiver na forma de uma cruz com quatro setas, clique no símbolo com a mesma forma, para passar para uma seta). Coloque a ponta da seta em cima do ponto cujas coordenadas quer saber. As coordenadas desse ponto aparecem na orla da mesma janela, em cima ou em baixo. Pode fazer zoom do gráfico para efectuar medições com maior precisão.

Pode poupar tempo, nos seus ensaios, se, para cada valor de $\omega$, em vez duma sequência de comandos do tipo

```
x = <expressão>
y = sistema1(x)
tplot(y)
```

usar simplesmente

```
tplot(sistema1(<expressão>)).
```

Pode também traçar os gráficos de várias respostas sobrepostos, e só depois fazer zoom e efectuar medições sobre eles.

Nas medições que fizer sobre gráficos, neste ponto e nos seguintes, utilize o zoom, sempre que necessário, para obter a precisão pretendida.

1. Determine o módulo da resposta em frequência do `sistema1` para diversos valores da frequência. Indique os valores do módulo da resposta em frequência determinados para $\omega \in \{0, 1, 3, 5, 10, 20, 40\}$.

   *Nota: A simulação do sistema que está implementada no computador não é perfeita. Tem uma aproximação bastante boa para $|\omega| \leq 40$, mas vai-se tornando menos exacta para valores maiores da frequência. Por isso, não utilize $|\omega| > 40$.*

2. Utilizando os resultados obtidos no ponto anterior, esboce o gráfico do módulo da resposta em frequência. Indique se o `sistema1` é um filtro passa-baixo, passa-alto ou passa-banda, e se é ideal ou não.

3. Sabendo que o `sistema1` corresponde ao circuito RC estudado na Preparação Prévia e que $C = 400\,\mu F$, estime o valor da resistência $R$ a partir de valores da resposta em frequência do `sistema1` (os pedidos acima ou outros que entenda mais apropriados).

4. Na representação de sinais que é usada no computador não é possível representar exactamente o impulso unitário de tempo contínuo, $\delta(t)$. Ir-se-á usar uma representação aproximada constituída por um impulso muito curto, mas de duração não nula, e de amplitude muito grande, mas não infinita. A função `delta` gera essa representação. Determine experimentalmente a resposta do `sistema1` ao impulso unitário, usando como entrada o sinal `delta(t)`. Indique o esboço do gráfico que obteve.

5. Meça, no gráfico da resposta ao impulso, o *valor inicial* da resposta $h(t)$, definido como $h(0^+) = \lim_{t\to 0^+} h(t)$, e verifique se o valor que obteve é compatível com o facto de se tratar da resposta ao impulso do circuito RC estudado na Preparação Prévia, com $C = 400\,\mu F$ e com o valor da resistência que determinou acima. Indique o valor de $h(0^+)$ medido.

# 7 Filtragem de sinais

Nesta parte do trabalho ir-se-á filtrar um sinal com diversos filtros, e observar os resultados. As funções `sistema2(·)`, `sistema3(·)`, `sistema4(·)` implementam os seguintes sistemas:

| | |
|---|---|
| `sistema2` | Filtro passa-baixo com frequência de corte de cerca de 500 Hz. |
| `sistema3` | Filtro passa-alto com frequência de corte de cerca de 250 Hz. |
| `sistema4` | Filtro passa-banda com banda passante de 800 Hz a 1000 Hz, aproximadamente. |

A variável `p` contém um sinal periódico com a frequência fundamental de 50 Hz. Passe o sinal `p` por cada um dos sistemas indicados, e compare o gráfico do sinal de entrada com o de cada uma das saídas. Faça zoom dos gráficos de forma a que a largura da janela fique ocupada apenas por cerca de dois períodos do sinal, para poder observar cada uma das formas de onda com detalhe. Para comparar mais facilmente os sinais de entrada e de saída do sistema, de modo a poder responder às questões abaixo enunciadas, trace os gráficos dos dois sinais sobrepostos na mesma figura.

Ouça os sinais através dos auscultadores, por meio da função `play`.

Visualize os módulos dos espectros do sinal de entrada e dos sinais de saída (não visualize estes gráficos sobrepostos, porque ficam difíceis de distinguir entre si)[1]. Para colocar na variável `X` a transformada de Fourier (ou seja, o espectro) do sinal `x` e traçar o gráfico do seu módulo, utilize as instruções

```
X = FourierTransform(x)
fplot(abs(X))
```

Pode ser útil traçar os gráficos da entrada e da saída do sistema em janelas separadas. Para isso:

- Dê o comando para traçar o primeiro gráfico.
- Dê o comando `figure()`. Abrir-se-á uma nova janela.
- Dê o comando para traçar o segundo gráfico.

Note que o comando usado para traçar um gráfico no domínio da frequência (`fplot`) é diferente do usado para traçar um gráfico no domínio do tempo (`tplot`). Note também que, tendo `X`, em geral, valores complexos, é necessário explicitar que se pretende traçar o gráfico do módulo de `X`, através do uso da função `abs`. Poder-se-iam também ter usado as funções `angle`, `real` ou `imag`, para visualizar, respectivamente, a fase, a parte real ou a parte imaginária de `X`.

Responda às seguintes questões, respeitantes à variação temporal dos sinais de entrada e de saída:

1. A saída do filtro passa-baixo reproduz bem as variações rápidas do sinal `p`? E as variações lentas? Explique porquê.
2. A saída do filtro passa-alto reproduz bem as variações rápidas do sinal `p`? E as variações lentas? Explique porquê.
3. Verifique que a saída do filtro passa-banda tem, localmente, a forma aproximada duma sinusóide. Verifique que a amplitude dessa sinusoide varia no tempo, de forma sinusoidal também. Meça o valor aproximado das frequências dessas sinusóides, e indique os valores encontrados. Explique os valores de frequência encontrados e por que razão a saída do filtro tem esta forma.

[1] Note que a relação $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ se verifica só de forma aproximada, e que o espectro do sinal `p` não é exactamente um espectro de riscas, porque todos os cálculos são feitos num intervalo de tempo finito, em vez de o serem de $-\infty$ a $+\infty$.