

Sinais e Sistemas – 1º trabalho de laboratório

Conceitos básicos sobre sinais e sistemas

1 Introdução

Os trabalhos de laboratório são constituídos por duas partes. A primeira, de preparação prévia, deve ter resolução submetida até ao fim da semana anterior à da realização das sessões de laboratório.

A segunda parte do trabalho é experimental. Embora esta parte deva ser resolvida no laboratório, é fundamental que os alunos compreendam bem, antecipadamente, o que terão de fazer. Caso contrário, é muito provável que a aula de laboratório não seja suficiente para realizarem todo o trabalho experimental. Os alunos poderão treinar antecipadamente a realização da parte experimental nos seus próprios computadores, para o que deverão consultar as indicações existentes na página da disciplina. A resolução da parte experimental deve ser submetida até ao fim da semana em que se realizam as sessões de laboratório.

O enunciado contém alguns parágrafos formatados como este, os quais contêm informações complementares que podem ser úteis para uma melhor compreensão do que está a fazer, mas que não são essenciais para a realização do trabalho.

No final deste documento encontra algumas notas sobre a forma como os sinais são representados no computador. A leitura dessas notas, embora não seja indispensável para a realização do trabalho, pode ajudá-lo a compreender melhor alguns aspectos dessa realização.

Preparação Prévia

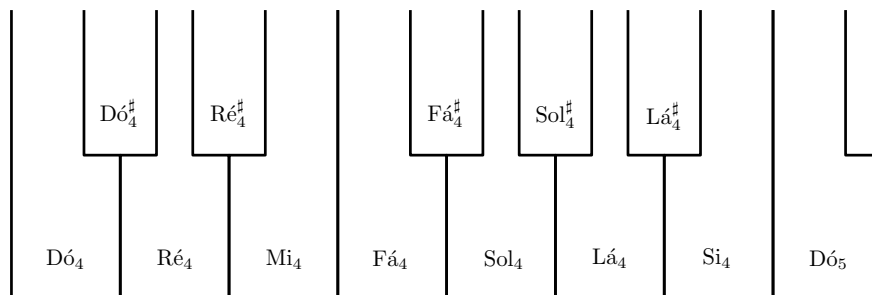
2 Sinais

2.1 Sinusóides

Nesta parte do trabalho irá gerar algumas sinusóides e ouvir os correspondentes sons. Esta parte é só experimental (não tem preparação prévia).

2.2 Notas musicais

Cada nota musical corresponde a uma frequência bem definida. A figura da página seguinte representa a oitava central do teclado dum piano.



Tenha em atenção os seguintes dados relativos às frequências das notas musicais:

- A frequência do Lá₄ é de 440Hz.

- A escala musical é logarítmica. A diferença de uma oitava (por exemplo entre $D\acute{o}_5$ e $D\acute{o}_4$) corresponde sempre a uma relação de frequências de 2:1. Por exemplo, a frequência do $D\acute{o}_5$ é dupla da do $D\acute{o}_4$.
- As diferenças entre notas sucessivas (incluindo as notas correspondentes às teclas pretas) correspondem sempre à mesma relação de frequências, que é chamada de “meio tom”. Como há 12 meios tons numa oitava, a relação de frequências correspondente a cada meio tom é de $\sqrt[12]{2}$, de modo a que a relação numa oitava seja de 2:1, como indicado acima. Por exemplo, a frequência do $D\acute{o}_4^\sharp$ é igual à do $D\acute{o}_4$ multiplicada por $\sqrt[12]{2}$ (o símbolo “ \sharp ” designa-se por “sustenido”, no contexto musical).¹

Com estes dados, é possível calcular a frequência de qualquer nota do teclado.

1. Determine as frequências das notas Mi_4 , $F\acute{a}_4^\sharp$, Sol_4 , Si_4 , $D\acute{o}_5$.

As frequências que determinou serão utilizadas na parte experimental do trabalho.

3 Sistemas

Nesta parte do trabalho irá estudar as respostas de alguns sistemas a diversos sinais.

Considere o sistema cuja relação entrada-saída é dada por

$$y(t) = x(t) - 0.3x(t - 0.4),$$

em que $x(t)$ representa a entrada do sistema e $y(t)$ representa a sua saída.

1. Classifique o sistema quanto à linearidade e à invariância no tempo.
2. Determine e esboce a resposta do sistema ao impulso unitário.
3. Classifique o sistema quanto à memória, à causalidade e à estabilidade.
4. Determine e esboce a resposta do sistema ao sinal $x_1(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$.
5. Determine a resposta do sistema ao estímulo $x_2(t) = \cos(15t)$. Escreva o resultado na forma sinusoidal $y_2(t) = A \cos(\omega t + B)$, determinando os valores de $A \in [0, +\infty)$, $\omega \in [0, +\infty)$ e $B \in (-\pi, \pi]$. (Tenha em conta que os argumentos das funções trigonométricas são representados em *radianos*.)

Trabalho Experimental

4 Nota importante

A finalidade da parte experimental dos trabalhos de laboratório de Sinais e Sistemas é conseguir que compreenda melhor os vários conceitos estudados na disciplina. Não se pretende que observe passivamente os resultados que vai obtendo, mas sim que os analise e interprete.

Em particular, quando, no enunciado, se pede que comente os resultados que obteve, não se pretende que descreva esses resultados, mas sim que os interprete à luz daquilo que sabe (por exemplo vendo se eram expectáveis, analisando se fazem sentido ou não, ou o que significam, etc.).

¹As relações de frequências aqui descritas correspondem à *escala cromática igualmente temperada*, que é muito usada na afinação de instrumentos musicais. Existem, no entanto, muitas outras formas de afinar esses instrumentos.

5 Inicialização

Para iniciar a parte experimental do seu trabalho, proceda da seguinte forma:

- Abra a pasta `LabSS`, que deverá estar localizada no “Desktop” do computador. Dentro desta pasta, abra a pasta `WinPython-32bit-3.3.3.3`.
- Faça duplo clique no ficheiro `Spyder` (ou `Spyder.exe`). Não confunda com o ficheiro `Spyder (light)`, que não é o que se pretende utilizar.
- Ao fim de algum tempo, deverá aparecer uma janela com o título “Spyder (Python 3.3)”.
- Ao fim de mais algum tempo, deverá aparecer nessa janela algum texto, que termina numa linha com “In [1]:”.
- Introduza nessa linha a instrução `run -i lab1` seguida de “Enter” (mudança de linha), para preparar o sistema para a realização do 1º trabalho de laboratório. Tenha em atenção que o uso do parâmetro “-i” neste comando é importante.
- Deverá aparecer o texto “Sinais e Sistemas - 1º trabalho de laboratório: inicialização concluída.”, seguido duma linha com “In [2]:”.
- O sistema está pronto para a realização do trabalho. Deverá proceder como se indica nas secções seguintes.

6 Sinais

6.1 Sinusóides

Nesta parte do trabalho irá gerar algumas sinusóides e ouvir os correspondentes sons.

1. Comece por gerar uma variável de tempo com a duração de 2s (com valores no intervalo $[-1s, 1s]$), usando a instrução `t = timevar(2)`. Na função `timevar`, o argumento indica a duração da variável a gerar.
2. Em seguida, gere uma variável `x` contendo uma sinusóide com a frequência de 10Hz,² através do comando `x = cos(2*pi*10*t)`.
3. Visualize o gráfico da sinusóide através da instrução `tplot(x)`. Irá aparecer uma janela com o gráfico dessa função (tenha em atenção que nalguns sistemas essa janela pode aparecer “atrás” de outras janelas já existentes). Confirme que o sinal que gerou tem 10 períodos por segundo.

Experimente fazer zoom do gráfico e deslocá-lo. Para isso, comece por clicar na cruz com setas nas quatro pontas, na janela que contém o gráfico. Feito isso, poderá fazer zoom mantendo o botão direito do rato carregado e arrastando o rato horizontal e/ou verticalmente. Poderá deslocar o gráfico arrastando o rato com o botão esquerdo carregado. Pode voltar à forma inicial do gráfico clicando no símbolo com a forma de uma casa. Habitue-se à forma como funcionam estas operações, para poder examinar os detalhes dos vários gráficos que irá gerar ao longo do trabalho.

No final, feche a janela que contém o gráfico. Se não fechar a janela, o gráfico que vai gerar no ponto seguinte irá aparecer sobreposto ao que gerou neste ponto.

No sistema existe também a função `plot`, que é semelhante à `tplot`, mas que cria gráficos em que a escala dos tempos não está correctamente graduada. Não faça confusão entre as duas funções.

²É comum, nas aplicações, usar-se a *frequência linear*, representada por f , e relacionada com a frequência angular por $\omega = 2\pi f$. A frequência linear tem normalmente unidades de ciclos por segundo, ou Hertz (Hz).

4. Mude agora a variável `t` para a duração de 1s, com a instrução `t = timevar(1)`. Gere, na variável `x`, uma sinusóide com a frequência de 1000Hz e visualize-a. Inicialmente, o gráfico deverá parecer apenas um rectângulo azul. Faça zoom e verifique que se trata do gráfico duma sinusóide com oscilação muito rápida.
5. Ouça o sinal que gerou. Para isso deverá ter os auscultadores ligados à saída apropriada do computador, e deverá dar a instrução `play(x)`. Controle o volume do áudio de modo a que o som não fique muito alto (os sons muito altos produzem danos nos ouvidos).
6. Dê os seguintes comandos, que têm a finalidade de preparar o sistema para os ensaios que vai fazer a seguir:

```
samplingrate = 48000
t = timevar(1)
```

Gere sinusóides com várias frequências e ouça-as. As sinusóides de frequências mais altas correspondem aos sons mais graves, ou aos mais agudos?³

7. Tente determinar, aproximadamente, quais as frequências máxima e mínima que cada um dos membros do grupo consegue ouvir, e indique os resultados que obteve.

Note que as frequências que determinou podem não corresponder aos limites de audição dos membros do grupo, porque podem ser influenciadas pelo equipamento que está a utilizar (pelos auscultadores, por exemplo).

6.2 Notas musicais

1. Comece por dar o comando `samplingrate = 16000`.
2. A função `seqsin` gera uma sequência de sinusóides ou períodos de silêncio.

Por exemplo, a instrução

```
x = seqsin(440, 0.3, 0, 0.5, 466.164, 0.15)
```

cria, na variável `x`, uma sinusóide com a frequência de 440 Hz e com a duração de 0.3 segundos, seguida dum período de silêncio com a duração de 0.5 segundos, seguida duma sinusóide com a frequência de 466.164 Hz e com a duração de 0.15 segundos. Como a frequência de 440 Hz corresponde à nota Lá₄ e a de 466.164 Hz corresponde à nota Lá₄[#], representaremos abreviadamente essa sequência de notas por “Lá₄(0.3), Sil(0.5), Lá₄[#](0.15)”.

Crie agora, na variável `x`, a sequência seguinte (note que determinou as frequências necessárias na Preparação Prévia) e ouça o sinal que gerou:

```
Sil(0.7), Sol4(0.1), Fá4#(0.1), Sol4(0.2), Si4(0.1), Dó5(0.1), Si4(0.8),
Sil(0.2), Fá4#(0.1), Sol4(0.1), Fá4#(0.2), Sol4(0.1), Lá4(0.1), Sol4(0.8),
Sil(0.2), Fá4#(0.1), Mi4(0.1), Fá4#(0.2), Si4(0.1), Dó5(0.1), Si4(0.8),
Sil(0.2), Fá4#(0.1), Mi4(0.1), Fá4#(1), Sil(0.7).
```

O que acabou de fazer corresponde a uma forma muito simples de sintetizar sinais musicais. A maioria dos instrumentos musicais electrónicos usa formas mais elaboradas de gerar os sons, mas na base dessas formas de os gerar está normalmente algo de semelhante àquilo que fez aqui.

O som correspondente a uma sinusóide tem um timbre relativamente “pobre”. Pode obter um som um pouco mais interessante com a instrução `play(1.5*x)`. A função `play` limita o sinal ao intervalo $[-1, 1]$, que corresponde à gama máxima de amplitudes que pode ser reproduzida pelo sistema de áudio do computador. Fornecendo a essa função sinusóides com

³Não utilize frequências superiores a 24 kHz, porque elas não seriam correctamente reproduzidas. Quando estudar a amostragem de sinais compreenderá por que razão isso acontece.

Para tornar os testes mais rápidos, pode incluir a expressão da sinusóide directamente no comando `play`. Por exemplo: `play(cos(2*pi*1000*t))`.

uma amplitude superior a 1, os picos positivos e negativos das sinusóides irão ser “cortados”, o que origina um sinal com um timbre diferente do da sinusóide. No 2º trabalho de laboratório irá lidar mais em detalhe com sinais periódicos que não são sinusoidais.

Pode visualizar graficamente a sequência de sinusóides que gerou. Se fizer zoom nas transições entre sinusóides consecutivas, verificará que cada sinusóide termina de forma suave, e que a sinusóide seguinte se inicia também de forma suave. Se houvesse transições abruptas entre sinusóides, ouvir-se-iam “cliques” desagradáveis nas transições entre notas. Além disso, notas consecutivas com a mesma frequência soariam como uma única nota de duração mais longa.

Os adaptadores de áudio de alguns computadores fazem um pequeno “clique” ao ligar e ao desligar. Os silêncios que foram colocados no início e no fim da sequência de notas destinam-se a separar esses cliques da melodia.

Pode gerar várias vozes simplesmente através da soma dos sinais correspondentes. Como exemplo, considere a frase musical da figura seguinte, a cuja voz mais aguda corresponde a variável x que gerou e ouviu.



Para gerar as outras vozes, pode criar na variável y , a sequência

Sil(0.5), Mi₄(0.2), Si₃(0.2), Mi₄(0.2), Si₃(0.2), Mi₄(0.2), Si₃(0.2), Mi₄(0.2), Si₃(0.2),
Ré₄(0.2), Si₃(0.2), Ré₄(0.2), Si₃(0.2), Ré₄(0.2), Si₃(0.2), Ré₄(0.2), Si₃(0.2),
Ré₄(0.2), Si₃(0.2), Ré₄(0.2), Si₃(0.2), Ré₄(0.2), Si₃(0.2), Ré₄(0.2), Si₃(0.2),
Ré₄(0.2), Lá₃(0.2), Ré₄(0.2), Lá₃(0.2), Ré₄(0.2), Lá₃(0.2), Ré₄(0.2), Lá₃(0.2), Sil(0.5)

e na variável z , a sequência

Sil(0.5), Mi₃(0.4), Sol₃(0.4), Mi₃(0.4), Sol₃(0.4),
Ré₃(0.4), Sol₃(0.4), Ré₃(0.4), Sol₃(0.4),
Ré₃(0.4), Fá₃[#](0.4), Ré₃(0.4), Fá₃[#](0.4),
Ré₃(0.4), Fá₃[#](0.4), Ré₃(0.4), Fá₃[#](0.4), Sil(0.5).

A instrução `play(0.5*x+0.25*y+0.25*z)` permite ouvir o sinal musical correspondente à frase da figura.

7 Sistemas

Nesta parte do trabalho irá estudar as respostas de alguns sistemas a alguns sinais. Mantenha o valor `samplingrate = 16000` usado no ponto anterior. Os sinais x_1 e x_2 , referidos a seguir, são os que foram utilizados na preparação prévia:

$$x_1(t) = u(t+1) - u(t-1),$$

$$x_2(t) = \cos(15t).$$

1. A função `sistema1` implementa o sistema estudado na preparação prévia, com relação entrada-saída dada por

$$y(t) = x(t) - 0.3x(t-0.4).$$

Para visualizar a resposta do sistema ao sinal $x_1(t)$, dê as seguintes instruções:

```
t = timevar(4)
x1 = u(t+1) - u(t-1)
y1 = sistema1(x1)
tplot(y1)
```

Apresente o gráfico que obteve e comente.

2. Por meio duma sequência de instruções semelhante à anterior, calcule a resposta do sistema ao sinal $x_2(t)$ e visualize o seu gráfico. Apresente o gráfico que obteve e comente, em particular no que se refere aos valores de amplitude, frequência e fase determinados na preparação prévia.

Tenha em conta que, no computador, os sinais não são representados para t a variar de $-\infty$ a $+\infty$. Por exemplo, o comando `t = timevar(4)` gera a variável `t` com valores em $[-2s, 2s]$, e o comando `x2=cos(15*t)` gera uma sinusóide para valores de t nesse intervalo. Para os restantes valores de t , o sinal correspondente é considerado como sendo nulo. Por este motivo, é comum que, ao calcular respostas de sistemas a sinais, surja um “transitório” no início da resposta que foi calculada, e outro no final desta. Ao efectuar medições sobre o gráfico da resposta, deverá evitar fazê-las sobre estes transitórios.

3. A variável `fala` contém o registo de um pequeno segmento de fala. Ouça-o. Em seguida processe-o pelo `sistema1` e ouça o resultado. Descreva o efeito produzido pelo sistema no sinal acústico, e explique, por palavras suas, porque é que o sistema produz esse efeito.
4. A instrução `y = sistema2(x)` permite calcular a resposta dum outro sistema ao sinal contido em `x`. Realize experiências com a finalidade de classificar esse sistema no que diz respeito à linearidade, à invariância no tempo, à memória, à causalidade e à estabilidade. Descreva as experiências que realizou, explicitando os sinais de entrada usados, as saídas obtidas e as conclusões que tirou. Explícite, em relação a cada propriedade, se conseguiu ter a certeza da classificação, ou se conseguiu apenas ter indicações. Descreva apenas as experiências que foram importantes para tirar conclusões.

Notas sobre a representação de sinais no computador

Neste trabalho lida-se com sinais de tempo contínuo. Estes sinais não são representados de forma exacta no computador. De facto, estes sinais têm valores para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$, e no computador só se pode representar um número finito de valores.⁴ Por isso, neste trabalho:

- Os sinais são representados apenas num intervalo de tempo finito. Fora desse intervalo, os sinais são considerados como sendo nulos.
Por uma questão de simplicidade, neste trabalho utilizam-se sempre intervalos de tempo simétricos em relação à origem. Por exemplo, o comando `t = timevar(d)` cria a variável `t` com valores no intervalo $[-d/2, d/2]$. O comando `x1 = cos(2*pi*t)` cria, na variável `x`, uma sinusóide com o argumento a variar nesse intervalo. Fora desse intervalo, o sinal correspondente a essa variável é considerado como sendo nulo.
- Os sinais são representados apenas pelos valores que tomam em instantes igualmente espaçados entre si. Esses valores são normalmente designados por *amostras* do sinal. O número de amostras por segundo designa-se por ritmo, ou frequência, de amostragem, e está indicado na variável `samplingrate`. Na maior parte deste trabalho utiliza-se `samplingrate = 16000`. Para testar os limites de audição usa-se `samplingrate = 48000`. Como aprenderá mais tarde, a representação de sinais por meio de amostras só é correcta até metade da frequência de amostragem. Se, ao testar os limites de audição, usasse uma frequência de amostragem de 16000, só poderia testar frequências até 8 kHz, valor que fica abaixo do limite superior de audição da maioria das pessoas.
- Em consequência do que foi dito acima, cada sinal é representado por um número finito de valores. Estes são guardados em variáveis do tipo `array`. As variáveis `t` e `x`, mencionadas acima, são `arrays`.

A função `tpplot` faz interpolação linear entre as amostras consecutivas do sinal que está a representar. Se fizer o gráfico dum sinal de variação muito rápida, por exemplo com a instrução `tpplot(cos(10000*t))`, e fizer zoom muito acentuado do gráfico, poderá ver que este é constituído por segmentos de recta unindo as diversas amostras.

Dada a forma como os sinais são representados, não é possível calcular a saída do sistema 1, definido acima, através de uma expressão do tipo `y = x(t) - 0.5 * x(t-0.25)`. De facto, no computador, `x` não é uma função, mas sim um `array`. Poderíamos pensar em usar `t` como índice do `array x`, mas o argumento dum `array` tem de ser inteiro, e `t` toma valores não inteiros. O índice do `array x`, no computador, não representa directamente o valor do tempo, embora esteja relacionado com ele.

É possível fazer `x1 = u(t) - u(t-1.5)`, à semelhança do indicado no enunciado, porque `u` está definido como função e não como `array`. Pode ver, no ficheiro `lab1.py`, a forma como essa função é definida, bem como a forma como é implementada a função `sistema1`, e diversos outros aspectos de implementação. A função `sistema2` é fornecida compilada para que não possa ver como é calculada, porque se pretende que tente determinar as propriedades do sistema correspondente exclusivamente através de ensaios realizados sobre ele. É comum, na prática, ter de se lidar com sistemas cuja descrição matemática se desconhece, e terem de se estudar esses sistemas através de ensaios feitos sobre eles.

⁴Seria possível representar exactamente alguns sinais através da sua expressão analítica, mas esse tipo de representação não seria conveniente para o trabalho que se pretende realizar. Por exemplo, o sinal contido na variável `fala` não seria representável nessa forma, porque não tem expressão analítica conhecida.