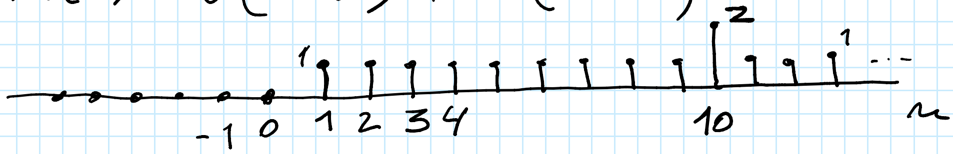
[A = 8 , B = 8, C = 0, D = 5 , E = 9.]

Problema 1 $\quad h(n) = \delta(n-10) + u(n-1)$



1.1 a) Sistema com memória porque $h(n) \neq k\,\delta(n)$
(por exemplo, $h(1) = 1 \neq 0$)

b) Sistema causal porque $h(n) = 0$ para $n < 0$.

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$, pelo que o sistema é instável.

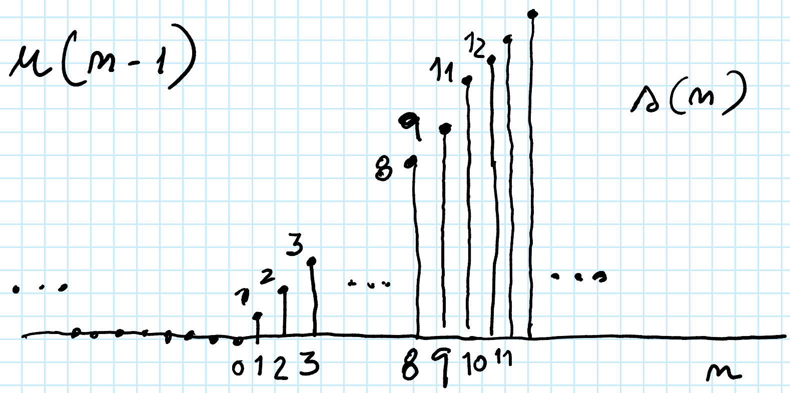
1.2 A resposta ao degrau unitário é

$$s(n) = u(n) * h(n) = u(n) * \left[\delta(n-10) + u(n-1)\right]$$
$$= u(n) * \delta(n-10) + u(n) * u(n-1)$$
$$= u(n-10) + r(n-1),$$

onde $\displaystyle r(n) = u(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\,u(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(n-k)$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 & , n \geq 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases} = (n+1)\,u(n)$$

Assim, $s(n) = u(n-10) + n\,u(n-1)$



Problema 2 $\quad [D+3 = 8]$

O sinal $x(t)$ tem período $T=6$, sendo $x(t) = 8\, r_3(t - 3/2)$,

onde $r_3(t)$ tem SF conhecida:

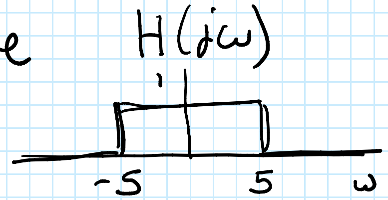
$$a_k = \frac{\sin\left(k\pi \frac{3}{6}\right)}{k\pi} = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}, \quad k \neq 0; \qquad a_0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Assim, $x(t) \xleftrightarrow{SF} b_k = 8\, a_k\, e^{-jk\omega_0 \frac{3}{2}}$, $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

(propriedades da linearidade e do deslocamento)

$$b_k = \frac{8 \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\, e^{-jk\frac{\pi}{2}}, \quad k \neq 0; \qquad b_0 = \frac{1}{2}\, 8 = 4.$$

Pela propriedade da filtragem, $y(t) \xleftrightarrow{SF} c_k = b_k\, H(jk\omega_0)$, onde



$$\left|k\frac{\pi}{3}\right| < 5 \iff |k| < \frac{15}{\pi} \simeq 4.77$$

Assim, $c_k = 0$ para $|k| \geq 5$. Para $|k| \leq 4$:

$$c_0 = b_0 = 4; \quad c_1 = b_1 = \frac{8}{\pi}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{8j}{\pi}; \quad c_2 = b_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{-8}{3\pi}\, e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \frac{-8j}{3\pi}; \quad c_4 = 0;$$ Como $y(t)$ é real, $c_{-k} = c_k^*$.

Assim, o sinal de saída é:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} = \frac{8j}{3\pi} e^{-j\pi t} + \frac{8j}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{3}t} + 4 - \frac{8j}{\pi} e^{j\frac{\pi}{3}t} - \frac{8j}{3\pi} e^{j\pi t}$$

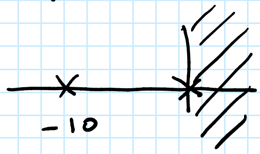
$$= 4 + \frac{16}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) + \frac{16}{3\pi} \sin\left(\pi t\right)$$

Problema 3 $\qquad y''(t) + 10\, y'(t) = 8\, x(t)$

3.1 A expressão da FT é imediata: $\quad H(s) = \dfrac{8}{s^2 + 10 s}$

Como o sistema é causal, a região de convergência de $H(s)$ é um semi-plano direito:

$$H(s) = \frac{8}{s(s+10)}$$



RC: $\operatorname{Re}\{s\} > 0$

3.2 $\quad H(s) = \underbrace{\dfrac{A}{s}}_{\operatorname{Re}\{s\}>0} + \underbrace{\dfrac{B}{s+10}}_{\operatorname{Re}\{s\}>-10}$, com $A = \dfrac{8}{0+10} = \dfrac{4}{5}$; $B = \dfrac{8}{-10} = -\dfrac{4}{5}$

Usando a propriedade da linearidade e uma TL conhecida:

$$h(t) = TL^{-1}\left\{H(s)\right\} = \frac{4}{5}\left(1 - e^{-10t}\right) u(t)$$

3.3 A função de transferência do sistema representado é:

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 - k H(s)} = \frac{8/s(s+10)}{1 - 8k/s(s+10)} = \frac{8}{s^2 + 10 s - 8k}$$

Para que o sistema seja estável, os pólos de $G(s)$ têm que estar no semi-plano complexo esquerdo (s.p.c.e.).
Para que $s(t)$ não tenha oscilações, os pólos têm ainda que ser reais.

Pólos: $\dfrac{-10 \pm \sqrt{100 + 32k}}{2} = -5 \pm \sqrt{25 + 8k}$

Pólos reais $\Leftrightarrow 25 + 8k \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -25/8$

Pólos no s.p.c.e. $\Leftrightarrow -5 + \sqrt{25+8k} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{25+8k} < 5$

$\Leftrightarrow 25 + 8k < 25 \Leftrightarrow k < 0$

Assim, a gama pedida é: $\quad k \in \left[-25/8\, ,\, 0\right[$

Problema 4 Freq. amostragem : $\omega_s = 2\pi/2 = \pi$.

4.1 $x_c(t)$ tem que ser de banda limitada a $\omega_s/2$: $X_c(j\omega)$ tem que ser tal que $X_c(j\omega)=0$ para $\omega \geq \pi/2$.

4.2 a) A resposta em frequência é imediata :

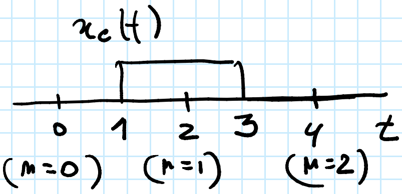
$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & |\omega| > \pi/2 \end{cases}$$

b) Para sinais $x_c(t)$ tais que $X_c(j\omega)=0$, $\omega \geq \pi/2$, tem-se

$$Y_c(j\omega) = H_c(j\omega)X_c(j\omega) = e^{-j\omega}X_c(j\omega)$$

, pelo que, usando a propriedade do deslocamento, $y_c(t) = x_c(t-1)$.

4.3 $x_c(t)$ não verifica as condições do T.A., pelo que é necessário determinar os sinais intermédios.



$$x_d(n) = x_c(nT) = x_c(2n) = \delta(n-1)$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega}) = e^{-j3\Omega/2} , \quad -\pi < \Omega \leq \pi .$$

$$Y_c(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T})H_r(j\omega) = \begin{cases} 2e^{-j3\omega} & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & |\omega| > \pi/2 \end{cases}$$

$$y_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y_c(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-j3\omega}e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{j(t-3)\omega}}{j(t-3)}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{e^{j(t-3)\pi/2} - e^{-j(t-3)\pi/2}}{\pi j(t-3)} = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(t-3)\right]}{\frac{\pi}{2}(t-3)}$$

[Interprete!]