Sinais e Sistemas – 1º teste – 19/4/2018 – Exemplo de resolução

Questão 1 Contracção de $2\times \Rightarrow T_y = 3/2$.

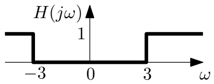
Questão 2 $y(n) = n^2\delta(n-3) = 9\delta(n-3)$.

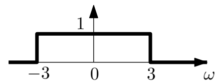
Questão 3 $x_3(n) = 2x_2(n-1)$. Se S fosse linear, teríamos $y_3(n) = 2y_2(n-1)$, o que não acontece.

Questão 4 $h(n) \neq k\delta(n) \Rightarrow$ SLIT com memória. $h(n) = 0, n < 0 \Rightarrow$ SLIT causal. $\sum_n h(n) = \infty \Rightarrow$ SLIT instável.

Questão 5 $\int_{2\pi} |X(e^{j\omega}|^2\, d\omega = 2\pi \sum_n |x(n)|^2 = 2\pi(2^2+1^2) = 10\pi$.

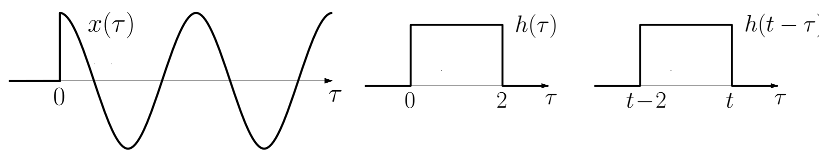
Questão 6.1 $x(t) = \cos(2t) + \cos(4t) \xrightarrow{\omega_c=3} y(t) = \cos(4t)$.

Questão 6.2 

$= 1 -$ 

$\overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} \quad h(t) = \delta(t) - \frac{\sin(3t)}{\pi t}$.

Problema 1.1 $y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$



Para $t \leq 0$, $y(t) = 0$.

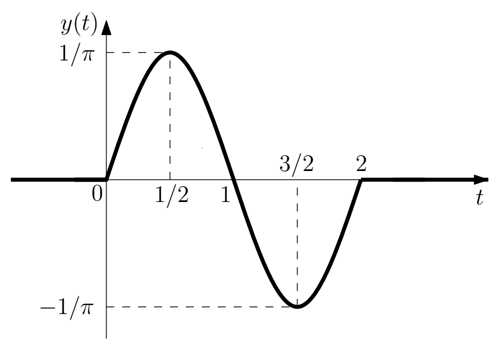
Para $t \geq 0$ e $t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$,

$$y(t) = \int_0^t \cos(\pi\tau) \times 1\, d\tau = \frac{\sin(\pi\tau)|_0^t}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t).$$

Para $t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$,

$$y(t) = \int_{t-2}^t \cos(\pi\tau)\, d\tau = \frac{\sin(\pi t) - \sin(\pi(t-2))}{\pi} =$$

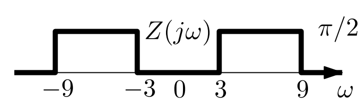
$$= \frac{\sin(\pi t) - \sin(\pi t - 2\pi)}{\pi} = \frac{\sin(\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi} = 0.$$



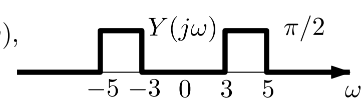
Problema 1.2 O sinal $y_2(t)$ é periódico, com a mesma frequência fundamental que $x_2(t)$, ou seja, $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$, e tem SF de coeficientes $b_k = a_k H(jk\pi/2)$, onde $H(j\omega)$ é a resposta em frequência do SLIT: $H(j\omega) = \text{TF}\{h(t)\}$.
Usando uma transformada conhecida e a propriedade do deslocamento no tempo, obtem-se $H(j\omega) = \dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j\omega}$.
Assim, $b_0 = a_0 H(j0) = 3 \times 2 = 6$, $b_1 = a_1 H(j\pi/2) = \pi\frac{2\sin(\pi/2)}{\pi/2}e^{-j\pi/2} = -4j$, $b_{-1} = b_1^* = 4j$ (o sinal é real), $b_4 = a_4 H(j2\pi) = 2\frac{2\sin(2\pi)}{2\pi}e^{-j2\pi} = 0$, $b_{-4} = b_4^* = 0$ e, para os restantes valores de k, $b_k = a_k H(jk\pi/2) = 0H(jk\pi/2) = 0$.
A resposta do SLIT é então $y_2(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} = 4je^{-j\frac{\pi}{2}t} + 6 - 4je^{j\frac{\pi}{2}t} = 6 + 8\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Problema 2 As TF de $x(t)$ e $p(t)$ são imediatas: $X(j\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| < 3 \\ 0 & |\omega| > 3 \end{cases}$ e $P(j\omega) = \pi\delta(\omega+6) + \pi\delta(\omega-6)$.

Como $z(t) = x(t)p(t)$, pela propriedade do produto, $Z(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega) = \dfrac{1}{2}X(j(\omega+6)) + \dfrac{1}{2}X(j(\omega-6))$, ou seja:



Como $F(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 5 \\ 0 & |\omega| > 5 \end{cases}$ e $Y(j\omega) = Z(j\omega)F(j\omega)$,



Assim, usando novamente as mesmas propriedades, obtem-se $y(t) = \text{TF}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin t}{t}\left(e^{-j4t} + e^{j4t}\right) = \dfrac{\cos(4t)\sin t}{t}$.

Problema 3 *Recorra a uma aula de dúvidas.* $\left[\text{De qualquer modo, TF}\left\{e^{-t^2}\right\} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\right]$