Sinais e Sistemas – 2º teste – 15/12/2017 – Exemplo de resolução

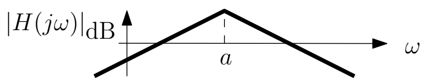
Questão 1 $H(e^{j\omega}) = 1/(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})$, $h(n) = (-1/3)^n u(n)$, $h(2) = (-1/3)^2 = 1/9$.

Questão 2 $H(s)$ racional, com mais pólos que zeros. RC semi-plano direito $\Rightarrow$ causal; RC $\supset$ eixo imaginário $\Rightarrow$ estável.

Questão 3.1 $\omega_s = 2\pi/0.2 = 10\pi \Rightarrow \omega_{\max} < 5\pi$. Resposta f).

Questão 3.2 $\omega_{\max} = 3\pi < 5\pi$. $\omega_c = 0.5\pi/0.2 = 2.5\pi$. $y(t) = 2 + \cos(2\pi t)$.

Questão 4.1



$|H(j0.1)| = |H(j10)| \Rightarrow a = 1$.

Questão 4.2 $|H(j0.1)| = 1$. $H(j0.1) = kj0.1/(j0.1+1)^2 \simeq j0.1k \Rightarrow |k| = 10$.

Questão 5 $H_1(0) = 5$. $H_2(0) = 10/3$. $H_3(0) = 5/4$. $H_4(0) = 1$. Resposta a).

Problema 1 A resposta em frequência e a TF de $y(n)$ são imediatas: $H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{7}{12}e^{-j\omega} + \frac{1}{12}e^{-j2\omega}$, $Y(e^{j\omega}) = 5 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}$.

Pela propriedade da convolução, $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, pelo que $X(e^{j\omega}) = \dfrac{5-\frac{3}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{7}{12}e^{-j\omega}+\frac{1}{12}e^{-j2\omega}}$.

$x(n) = \mathrm{TF}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$. $X(e^{j\omega}) = \dfrac{-18e^{-j\omega}+60}{e^{-j2\omega}-7e^{-j\omega}+12} = \dfrac{-18e^{-j\omega}+60}{(e^{-j\omega}-3)(e^{-j\omega}-4)} = \dfrac{A}{e^{-j\omega}-3} + \dfrac{B}{e^{-j\omega}-4}$.

$A = \dfrac{-18\times 3+60}{3-4} = -6$, $B = \dfrac{-18\times 4+60}{4-3} = -12$. $X(e^{j\omega}) = \dfrac{-6}{e^{-j\omega}-3} + \dfrac{-12}{e^{-j\omega}-4} = \dfrac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \dfrac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$.

Usando a propriedade da linearidade e a transformada conhecida de $a^n u(n)$, temos $x(n) = \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$.

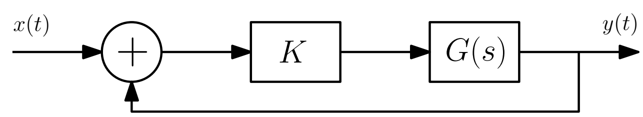
Problema 2 Usando a prop. da linearidade e uma TF conhecida, $X(j\omega) = \pi[u(\omega+4) - u(\omega-4)]$, pelo que $\omega_{\max} = 4$. $\omega_s = 2\pi/0.1 = 20\pi > 2\omega_{\max}$, pelo que são verificadas as condições do Teorema da Amostragem. Assim, o sistema $x(t) \to y(t)$ é equivalente a um SLIT de resposta em frequência $H_c(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} = \begin{cases} H(e^{j0.1\omega}) & |\omega| < 10\pi \\ 0 & |\omega| > 10\pi \end{cases}$

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \begin{cases} e^{-j2(0.1\omega)} & |0.1\omega| \le 0.3 \\ 0 & |0.1\omega| > 0.3 \end{cases} & |\omega| < 10\pi \\ 0 & |\omega| > 10\pi \end{cases} = \begin{cases} \begin{cases} e^{-j0.2\omega} & |\omega| \le 3 \\ 0 & |\omega| > 3 \end{cases} & |\omega| < 10\pi \\ 0 & |\omega| > 10\pi \end{cases} = \begin{cases} e^{-j0.2\omega} & |\omega| \le 3 \\ 0 & |\omega| > 3 \end{cases}$$

Assim, $Y(j\omega) = X(j\omega)H_c(j\omega) = \pi e^{-j0.2\omega}[u(\omega+3) - u(\omega-3)]$. $y(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}dt$.

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} e^{-j0.2\omega}e^{j\omega t}dt = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} e^{j\omega(t-0.2)}dt = \frac{e^{j\omega(t-0.2)}\big|_{-3}^{3}}{2j(t-0.2)} = \frac{e^{j3(t-0.2)} - e^{-j3(t-0.2)}}{2j(t-0.2)} = \frac{\sin[3(t-0.2)]}{t-0.2}.$$

Problema 3 O sistema $x(t) \to y(t)$ é equivalente ao que se representa ao lado, onde $G(s) = \dfrac{1/(s+10)}{1-1/(s+10)} = \dfrac{1}{s+9}$.



A sua função de transferência é então $H(s) = \dfrac{KG(s)}{1-KG(s)} = \dfrac{K/(s+9)}{1-K/(s+9)} = \dfrac{K}{s+9-K}$, sendo de 1ª ordem sem zeros.

O valor final da resposta ao degrau unitário é $H(0) = \dfrac{K}{9-K}$. O tempo de estabelecimento é $t_s = 3\tau$, onde $\tau = \dfrac{1}{9-K}$.

$$\begin{cases} \frac{K}{9-K} > 2 \\ \frac{3}{9-K} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K}{9-K} > 2 \\ \frac{1}{9-K} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > 2(9-K) \\ 9-K > 1 \text{ (o que garante que } 9-K \text{ é positivo)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > 6 \\ K < 8 \end{cases} \Leftrightarrow K \in]6,8[.$$

Problema 4 *Recorra a uma aula de dúvidas.*