Sinais e Sistemas – 2º teste – 30/5/2017 – Exemplo de resolução

Questão 1 $H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1+(2/3)e^{-j\omega}}$, $y(n) + (2/3)y(n-1) = 4x(n)$.

Questão 2 $\omega_{\mathrm{M}} = 5$, $\omega_s > 2 \times 5 = 10$, $T < 2\pi/10 = \pi/5$.

Questão 3 $\omega_{\mathrm{M}} = 2\pi$, $\omega_s = 2\pi/(1/6) = 12\pi > 2\omega_{\mathrm{M}}$.
$\omega = 2\pi \leftrightarrow \Omega = 2\pi \times (1/6) = \pi/3$. $H(e^{j\pi/3}) = 2\cos(\pi/3) = 1$, $H(e^{j0}) = 2\cos(0) = 2$. $y(t) = 3 \times 2 + 1\cos(2\pi t)$.

Questão 4 RC não contém pólos, é limitada por pólos e contém o eixo imaginário: $-4 < \mathrm{Re}(s) < 2$.

Questão 5.1 $|H(j10)|_{(\mathrm{assimp.})} = \frac{10\times 10}{10\times 100} = 0.1 = -20\mathrm{dB}$.

Questão 5.2 Para $\omega << 1$, $H(j\omega) \simeq \frac{j10\omega}{10\times 100} = j0.01\omega$, $\arg H(j\omega) \simeq \pi/2$.

Questão 6 O módulo dos pólos é um factor de escala na resposta (quanto maior c, mais comprimida esta é) $\Rightarrow$ opcão e).

Problema 1 Pela propriedade da convolução, $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, onde $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ (TF conhecida). Sendo $e^{-j\omega} = z$, $Y(e^{j\omega}) = \dfrac{10-3z+z^2}{(1-\frac{1}{2}z)(1+\frac{1}{4}z^2)} = \dfrac{-80+24z-8z^2}{(z-2)(z^2-4)} = \dfrac{-80+24z-8z^2}{(z-2)(z-2j)(z+2j)} = \dfrac{A}{z-2} + \dfrac{B}{z-2j} + \dfrac{C}{z+2j}$,

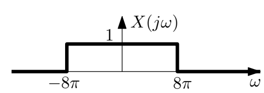
$A = \dfrac{-80+24\times 2-8\times 2^2}{(2-2j)(2+2j)} = \dfrac{-64}{8} = -8$, $B = \dfrac{-80+24\times 2j - 8\times(2j)^2}{(2j-2)(2j+2j)} = \dfrac{48j-48}{(2j-2)4j} = \dfrac{(j-1)48}{(j-1)8j} = -6j$, $C = B^*$.

$Y(e^{j\omega}) = \dfrac{-8}{e^{-j\omega}-2} + \dfrac{-6j}{e^{-j\omega}-2j} + \dfrac{6j}{e^{-j\omega}+2j} = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \dfrac{3}{1-\frac{1}{2j}e^{-j\omega}} + \dfrac{3}{1+\frac{1}{2j}e^{-j\omega}}$, pelo que a resposta é imediata:

$$y(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 3\left(-\frac{j}{2}\right)^n u(n) + 3\left(\frac{j}{2}\right)^n u(n) = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)^n\right]u(n) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[4 + 3\left(e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\frac{\pi}{2}n}\right)\right]u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[4 + 6\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]u(n)\,.$$

Problema 2 A função de transferência do sistema S, $x(t) \to y(t)$, é imediata: $H(s) = \dfrac{\frac{1}{s+3}}{1-\frac{1}{s+3}(A+Bs)} =$
$= \dfrac{1}{s+3-(A+Bs)} = \dfrac{1}{s(1-B)+(3-A)}$. Se $B=1$, $H(s)$ é constante e S é estável, desde que $A \neq 3$. Se $B \neq 1$, S tem um pólo em $p = -\frac{3-A}{1-B}$, sendo estável se e só se $p < 0$, *i.e.*, $\begin{cases} 3-A>0 \\ 1-B>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A<3 \\ B<1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3-A<0 \\ 1-B<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A>3 \\ B>1 \end{cases}$.

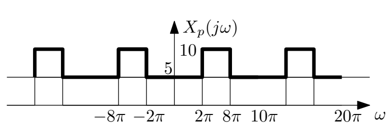
Problema 3 $\omega_s = 2\pi/0.2 = 10\pi$. A TF de $X(t)$ é conhecida:

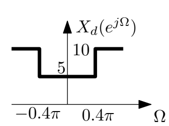


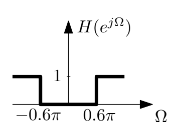
$\omega_{\mathrm{M}} = 8\pi > \omega_s/2$ (*aliasing*).

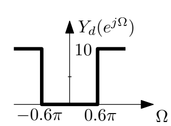
A entrada de S tem TF $X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T) = X_p(j5\Omega)$, onde $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) = 5\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k10\pi))$.

A saída de S tem TF $Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$, onde $H(e^{j\Omega})$ é a resposta em frequência de S. Graficamente:



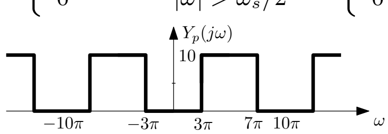


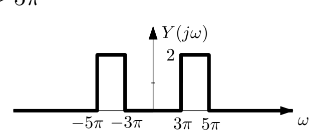




$(|\Omega| < \pi)$

A TF de $y(t)$ é $Y(j\omega) = \begin{cases} TY_p(j\omega) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} = \begin{cases} 0.2Y_p(j\omega) & |\omega| < 5\pi \\ 0 & |\omega| > 5\pi \end{cases}$, onde $Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T}) = Y_d(e^{j0.2\omega})$, *i.e.*,





Usando a propriedade da modulação, $y(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{Y(j\omega)\} = e^{j4\pi t}\dfrac{2\sin(\pi t)}{\pi t} + e^{-j4\pi t}\dfrac{2\sin(\pi t)}{\pi t} = \dfrac{4\cos(4\pi t)\sin(\pi t)}{\pi t}$.

Problema 4 *Recorra a uma aula de dúvidas.*