Sinais e Sistemas – 2º teste – 16/12/2016 – Exemplo de resolução

Questão 1 $H(e^{j\omega}) = \frac{3}{1-(1/2)e^{-j\omega}}$. $h(n) = 3(1/2)^n u(n)$.

Questão 2 $\omega_s = 2\pi/0.5 = 4\pi$. $x(t)$ real $\Leftrightarrow$ $X(j\omega)$ hermiteano. a), b) ou e) garantem que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 2\pi \simeq 6.28$. *Nota: para a) ou b) nem são precisas amostras para "recuperar" $x(t)$, já que o único sinal (real) que as verifica é $x(t) = 0$.*

Questão 3 $\omega_s = 2\pi/0.25 = 8\pi$. $\omega_M = \pi < \omega_s/2$. $\omega_c = 0.3\pi/0.25 = 1.2\pi > \omega_M$. $y(t) = x(t)$.

Questão 4 $H(s)$ racional, nºpólos > nºzeros. RC semi-plano direito $\Rightarrow$ causal. RC $\not\supset$ eixo imaginário $\Rightarrow$ instável.

Questão 5.1 $s(+\infty) = H(0) = |H(0)|e^{j\angle H(0)} = 10^{20/20}e^{j\pi} = -10$.

Questão 5.2 $|H|$: pólo em -10, zero em ± 100. $\angle H$: zero em -100. $H(s) = \frac{K(s+100)}{s+10}$. $H(0) = -10 \Rightarrow K = -1$.

Questão 6 $\tau = 1/5$. $t_s = 3/5 = 0.6$.

Problema 1

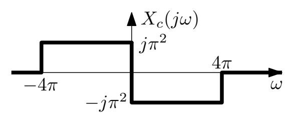
A TF de $x(n)$ é conhecida: $X(e^{j\omega}) = \dfrac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$. Pela propriedade da convolução, a TF de $y(n) = x(n) * h(n)$ é

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{6(6-e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{8}e^{-j\omega})} = \frac{192(6-e^{-j\omega})}{(e^{-j\omega}-4)(e^{-j\omega}-8)} = \frac{A}{e^{-j\omega}-4} + \frac{B}{e^{-j\omega}-8} = \frac{\frac{A}{-4}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{B}{-8}}{1-\frac{1}{8}e^{-j\omega}},$$

onde $A = \frac{192(6-4)}{4-8} = -96$, $B = \frac{192(6-8)}{8-4} = -96$. Assim, $y(n) = \frac{-96}{-4}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{-96}{-8}\left(\frac{1}{8}\right)^n u(n) = 12\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n\right]u(n)$.

Problema 2

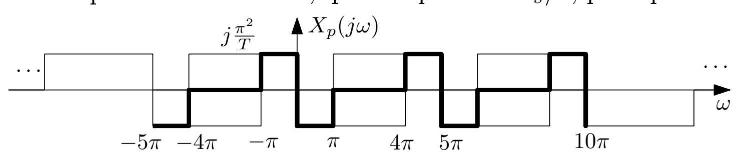
A frequência de amostragem é $\omega_s = 2\pi/T = 5\pi$. A TF do sinal $x_c(t)$ é



Assim, embora $x_c(t)$ seja de banda limitada, tem frequência máxima 4π, que é superior a $\omega_s/2$, pelo que existe "aliasing".

A TF de $x_p(t) = x_c(t)\sum_n \delta(t-nT)$

é $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$:



O sinal $x_r(t)$ é a resposta do filtro reconstrutor ideal ao sinal $x_p(t)$, pelo que a sua TF é $X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_p(j\omega)$, onde $H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_s/2 = \frac{5}{2}\pi \\ 0 & |\omega| > \frac{5}{2}\pi\,. \end{cases}$ Assim, $X_r(j\omega) = j\pi^2\left[u(\omega+\pi) - 2u(\omega) + u(\omega-\pi)\right]$, pelo que $x_r(t) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$.

Problema 3

A função de transferência do sistema global da figura é $H(s) = \dfrac{\frac{6}{s+21}}{1-3\frac{6}{s+21}} = \dfrac{6}{s+3}$, $\mathrm{Re}(s) > -3$ (por ser causal).

O sinal de entrada tem TL conhecida: $U(s) = \frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$. Pela propriedade da convolução, o sinal de saída tem TL $Y(s) = U(s)H(s) = \frac{6}{s(s+3)}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$. Por linearidade, $z(t) \longleftrightarrow Z(s) = U(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{18}{s(s+3)} = \frac{s+21}{s(s+3)}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$.

$Z(s) = \underbrace{\dfrac{A}{s}}_{\mathrm{Re}(s)>0} + \underbrace{\dfrac{B}{s+3}}_{\mathrm{Re}(s)>-3}$, onde $A = \frac{0+21}{0+3} = 7$, $B = \frac{-3+21}{-3} = -6$. Assim, $z(t) = 7u(t) - 6e^{-3t}u(t) = \left(7 - 6e^{-3t}\right)u(t)$.

Problema 4

$T = 1, \omega_s = 2\pi$. O sinal $x_c(t)$ é a resposta do filtro reconstrutor ideal a $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d(n)\delta(t-nT) = \delta(t)$, ou seja, $x_c(t) = h_r(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$. Assim, $y_c(t) = x_c(t-0.5) = \frac{\sin[\pi(t-0.5)]}{\pi(t-0.5)}$, pelo que $y_d(n) = y_c(nT) = y_c(n) = \frac{\sin[\pi(n-0.5)]}{\pi(n-0.5)}$.

Pela propriedade do deslocamento, a TF de $y_c(t)$ é $Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)e^{-j0.5\omega} = H_r(j\omega)e^{-j0.5\omega} = \begin{cases} e^{-j0.5\omega} & |\omega| < \pi \\ 0 & |\omega| > \pi\,. \end{cases}$.

A TF de $y_d(n)$ é $Y_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_c[j(\frac{\Omega}{T} - k\omega_s)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_c[j(\Omega - k2\pi)]$. Para $-\pi < \Omega < \pi$, $Y_d(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5\Omega}$.

Sendo $x_d(n) \to y_d(n)$ um SLIT, tem resposta em frequência dada pela TF da sua resposta ao impulso unitário $H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j0.5\Omega}$, para $-\pi < \Omega < \pi$, pelo que as TF da sua entrada e saída estão relacionadas por $Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega})e^{-j0.5\Omega}$. Assim, o sistema $x_d(n) \to y_d(n)$ pode ser interpretado como um atraso de meia amostra, já que a ligação em série de dois sistemas destes origina um sistema com resposta em frequência $H(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega})H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}$, que se sabe ser um atraso de uma amostra, uma vez que a propriedade do deslocamento da TF de sinais discretos é $x(n-n_0) \leftrightarrow X(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n_0}$.