Sinais e Sistemas – 2º teste – 18/12/2015 – Exemplo de resolução

Questão 1 $H(e^{j\omega}) = \frac{3+2e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j2\omega}}$.

Questão 2 $H(s)$ racional, com mais pólos que zeros. RC semi-plano direito $\Rightarrow$ causal; RC $\not\supset$ eixo imaginário $\Rightarrow$ instável.

Questão 3 $\omega_s = 2\pi/0.25 = 8\pi \Rightarrow \omega_{\max} < 4\pi$. $X(j\omega) = 0$, $|\omega| \geq 4\pi$.

Questão 4 $\omega_s = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$. $\omega_{\max} < 3\pi$. $\omega = 0 \Rightarrow \Omega = 0\frac{1}{3} = 0 \notin \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\omega = \pi \Rightarrow \Omega = \pi\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. $y(t) = \cos(\pi t)$.

Questão 5.1 $x(t) = \sin t \to y(t) = |H(j1)|\sin(t + \angle H(j1)) = 1\sin(t+\pi/2) = \cos t$.

Questão 5.2 Zero em 0, pólo em -100. $H(s) = \frac{Ks}{s+100}$. $|H(j\infty)| = 40\text{dB} = 100, \angle H(j\infty) = 0$. $H(j\infty) = K \Rightarrow K = 100$.

Questão 6 Sistemas sem zeros $\Rightarrow$ estabiliza mais rapidamente a resposta daquele que tiver os pólos mais afastados do eixo imaginário. H_1: pólo em -2; H_2: -5; H_3: -1, -10; H_4: $-1 \pm jX$. Estabiliza mais rapidamente a resposta de H_2.

Problema 1 $h(n) = \text{TF}^{-1}\{H(e^{j\omega})\}$. $H(e^{j\omega}) = \dfrac{-20e^{-j\omega}+70}{e^{-j2\omega}-7e^{-j\omega}+10} = \dfrac{-20e^{-j\omega}+70}{(e^{-j\omega}-2)(e^{-j\omega}-5)} = \dfrac{A}{e^{-j\omega}-2} + \dfrac{B}{e^{-j\omega}-5}$.

$A = \dfrac{-20\times 2+70}{2-5} = -10$, $B = \dfrac{-20\times 5+70}{5-2} = -10$. $H(e^{j\omega}) = \dfrac{-10}{e^{-j\omega}-2} + \dfrac{-10}{e^{-j\omega}-5} = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \dfrac{2}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$.

Usando a propriedade da linearidade e a transformada conhecida de $a^n u(n)$, temos $h(n) = \left[5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right]u(n)$.

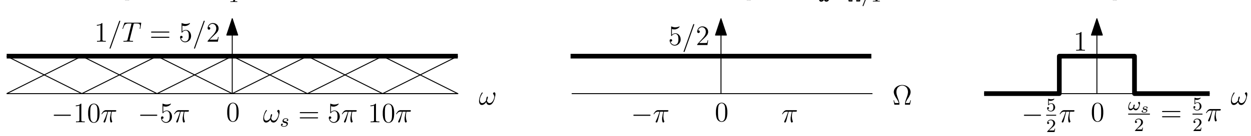
Problema 2 $x(t) = \frac{1}{2}e^{j3t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j3t}u(t)$. Usando a propriedade da linearidade e a transformada conhecida de $e^{-at}u(t)$, temos $X(s) = \dfrac{1/2}{s-3j} + \dfrac{1/2}{s+3j} = \dfrac{s}{(s-3j)(s+3j)}$, $\text{Re}(s) > 0$. $Y(s) = X(s)H(s) = \dfrac{6s}{(s+3)(s-3j)(s+3j)}$, $\text{Re}(s) > 0$.

$Y(s) = \underbrace{\dfrac{A}{s+3}}_{\text{Re}(s)>-3} + \underbrace{\dfrac{B}{s-3j}}_{\text{Re}(s)>0} + \underbrace{\dfrac{B^*}{s+3j}}_{\text{Re}(s)>0}$. $A = \frac{6\times(-3)}{(-3-3j)(-3+3j)} = \frac{-18}{9+9} = -1$, $B = \frac{6\times 3j}{(3j+3)(3j+3j)} = \frac{3}{3j+3} = \frac{1}{1+j} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

$y(t) = \left[-e^{-3t} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{3jt} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-3jt}\right]u(t) = \left\{-e^{-3t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{j(3t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(3t-\frac{\pi}{4})}\right]\right\}u(t) = \left[-e^{-3t} + \sqrt{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)\right]u(t)$.

Problema 3 $\omega_{\max} = 5\pi$. $\omega_s = 2\pi/0.4 = 5\pi < 2\omega_{\max}$. Não se verificam as condições do Teor. Amostragem – há "aliasing".

$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_k X_c(j(\omega - k\omega_s))$ $\quad$ $X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)|_{\omega=\Omega/T}$ $\quad$ $X_r(j\omega) = X_p(j\omega)H_r(j\omega)$



$X_d(e^{j\Omega})$ e $X_r(j\omega)$ são transformadas conhecidas: $x_d(n) = \text{TF}^{-1}\{X_d(e^{j\Omega})\} = \frac{5}{2}\delta(n)$, $x_r(t) = \text{TF}^{-1}\{X_r(j\omega)\} = \frac{\sin(5\pi t/2)}{\pi t}$.

Problema 4 $X(\sigma + j\omega) = \text{TF}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \Rightarrow x(t)e^{-8t} = \text{TF}^{-1}\left\{\dfrac{\sin(8\omega)}{\omega}\right\}$. A TF de $\begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$ é $\dfrac{2\sin(\omega T)}{\omega}$, pelo que, usando a propriedade da linearidade da TF, $x(t)e^{-8t} = \dfrac{1}{2}\left[u(t+8) - u(t-8)\right]$, logo $x(t) = \dfrac{1}{2}e^{8t}\left[u(t+8) - u(t-8)\right]$.

$x(t)$ é de diração limitada, pelo que a sua TL converge em todo plano. A expressão de $X(s)$ é imediata usando as propiedades da linearidade e do deslocamento da TL e a expressão conhecida da transformada de $e^{-at}u(t)$:

$$x(t) = \frac{e^{-64}}{2}e^{8(t+8)}u(t+8) - \frac{e^{64}}{2}e^{8(t-8)}u(t-8) \quad\Longleftrightarrow\quad X(s) = \frac{e^{-64}}{2}\frac{e^{8s}}{s-8} - \frac{e^{64}}{2}\frac{e^{-8s}}{s-8} = \frac{e^{8(s-8)} - e^{-8(s-8)}}{2(s-8)}.$$

Nota: é imediato confirmar que, de facto, $X(s)|_{s=8+j\omega} = \dfrac{\sin(8\omega)}{\omega}$.