Sinais e Sistemas – Exame – 14/1/2016 – Exemplo de resolução

Questão 1 $T = 2\pi/\pi = 2$.

Questão 2 $y(n) = (n-5)^2\delta(n-2) = (2-5)^2\delta(n-2) = 9\delta(n-2)$.

Questão 3 $x_1(t) \to y_1(t) = tx_1(3t+4)$, $x_2(t) \to y_2(t) = tx_2(3t+4)$, $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to y(t) = tx(3t+4) = tax_1(3t+4) + tbx_2(3t+4) = ay_1(t) + by_2(t) \Rightarrow$ linear. $x(t) = 1$ (limitado) $\to y(t) = t$ (ilimitado) $\Rightarrow$ instável.

Questão 4.1 $\delta(n) \to h(n) = \sin(n\pi/2)$, $x(n) = 3\delta(n-2) \to y(n) = 3h(n-2)$. $y(2) = 3h(0) = 3\sin(0\pi/2) = 0$.

Questão 4.2 $\sum_n |h(n)| = \sum_n |\sin(n\pi/2)| = +\infty \Rightarrow$ instável. $h(-1) = \sin(-\pi/2) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ não causal.

Questão 5 $a_{-3}e^{j(-3)\omega_0 t} + a_{-2}e^{j(-2)\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} = e^{-j9t} + 2e^{-j6t} + 2e^{j6t} + e^{j9t} = 4\cos(6t) + 2\cos(9t)$.

Questão 6 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = X(j\omega) \cdot \begin{cases} 1 & |\omega| < 6 \\ 0 & |\omega| > 6 \end{cases} = \begin{cases} X(j\omega) & |\omega| < 6 \\ 0 & |\omega| > 6. \end{cases}$

Questão 7 $X(e^{j\omega}) = \sum_n x(n)e^{-j\omega n} = x(3)e^{-j\omega 3} + x(4)e^{-j\omega 4} = 3e^{-j3\omega} + 4e^{-j4\omega}$.

Questão 8 a), b), c), f): sinais não são de banda limitada. d): $\omega_{\text{max}} = 2\pi$, $\omega_s = 2\pi/1 = 2\pi \not> 2\omega_{\text{max}} \Rightarrow$ não verifica TA. e): $\omega_{\text{max}} = 2\pi$, $\omega_s = 2\pi/0.1 = 20\pi > 2\omega_{\text{max}} \Rightarrow$ verifica TA.

Questão 9 $\omega_{\text{max}} = 25\pi$, $\omega_s = 2\pi/0.01 = 200\pi > 2\omega_{\text{max}} \Rightarrow$ verifica TA $\Rightarrow \omega = \Omega/T = 100\Omega$. $\Omega \in [0.2\pi, 0.4\pi] \Leftrightarrow \omega \in [20\pi, 40\pi]$. $0 \notin [20\pi, 40\pi]$, $0.3\pi \notin [20\pi, 40\pi]$, $25\pi \in [20\pi, 40\pi] \Rightarrow y(t) = \sin(25\pi t)$.

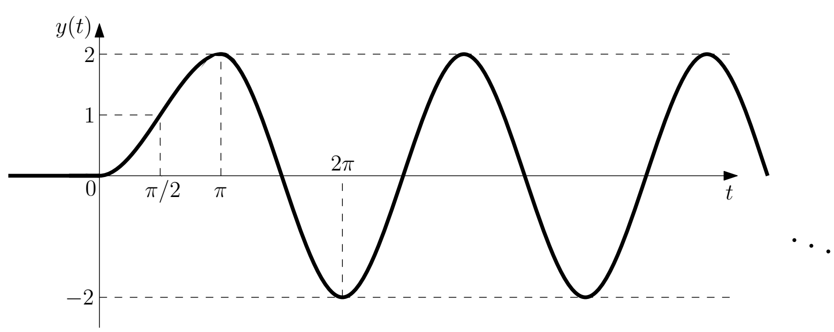
Questão 10.1 $H(s)$ racional, nºpólos > nºzeros. RC $\supset$ eixo imaginário $\Rightarrow$ estável. RC semiplano esquerdo $\Rightarrow$ não causal.

Questão 10.2 $H(s) = \dfrac{3s-2}{s^2-4s+3} \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 3\dfrac{dx(t)}{dt} - 2x(t)$

Questão 11 Zero em 0, pólo em -10, zero em -100. $H(s) = \frac{Ks(s+100)}{s+10}$. $|H(j1)|_{\text{(ass.)}} = 40\text{dB} = 100, \angle H(j1)_{\text{(ass.)}} = 90$. $H(j1)_{\text{(ass.)}} = \frac{Kj1(100)}{10} = j10K \Rightarrow K = 10$.

Questão 12 $H_2(0) = 4 > 3$, $H_3(0) = 3.5 > 3$, $H_4(0) = 4 > 3$, $H_1(0) = 1$. $S < 1$ (sempre) $\Rightarrow$ resposta de $H_1 < 2$.

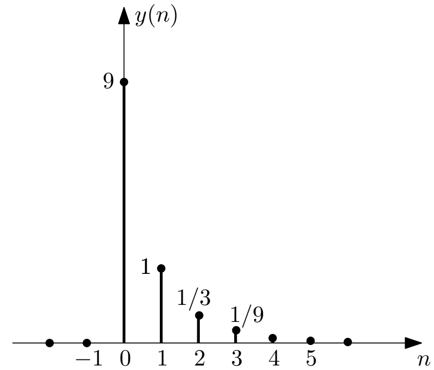
Problema 1 $y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\pi} \sin(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau$. Como $u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$, temos:
para $t < 0$, $y(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\pi} \sin(t-\tau)0\,d\tau = 0$;
para $0 < t < \pi$, $y(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{t} \sin(t-\tau)\,d\tau = \cos(t-\tau)|_0^t = \cos(t-t) - \cos(t-0) = 1 - \cos t$;
para $t > \pi$, $y(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\pi} \sin(t-\tau)\,d\tau = \cos(t-\tau)|_0^{\pi} = \cos(t-\pi) - \cos(t-0) = -2\cos t$.



Problema 2 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \dfrac{9-2e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = 6 + \dfrac{3}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$.

$y(n) = \mathrm{TF}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$.

Usando a propriedade da linearidade e TF conhecidas,
$y(n) = 6\delta(n) + 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n) = 9\delta(n) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$.



Problema 3 $x(t)$ tem TL conhecida: $X(s) = \dfrac{-1}{s-2}$, $\mathrm{Re}(s) < 2$. $Y(s) = X(s)H(s) = \dfrac{-2s^2-4s+21}{(s-2)(s+3)}$, $-3 < \mathrm{Re}(s) < 2$.

$$Y(s) = \frac{-2s^2-4s+21}{s^2+s-6} = -2 + \frac{-2s+9}{s^2+s-6} = -2 + \underbrace{\frac{A}{s-2}}_{\mathrm{Re}(s)<2} + \underbrace{\frac{B}{s+3}}_{\mathrm{Re}(s)>-3}. \quad A = \frac{-2\times 2+9}{2+3} = 1,\ B = \frac{-2\times(-3)+9}{-2-3} = -3.$$

Usando a propriedade da linearidade e TL conhecidas, $y(t) = -2\delta(t) - e^{2t}u(-t) - 3e^{-3t}u(t)$.

Problema 4 $x(t) = \sin(2t) \to y(t) = |H(j2)|\sin[2t + \angle H(j2)]$. $H(j2) = \dfrac{1}{j2+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{-j\pi/4}$. $y(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

A é o período de $y(t)$: $A = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. B é a amplitude de $y(t)$: $B = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

C é o primeiro máximo de $y(t)$: $\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2t - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow C = \dfrac{3\pi}{8}$.

Problema 5 Sistema real de segunda ordem sem zeros: $H(s) = \dfrac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, com K real.

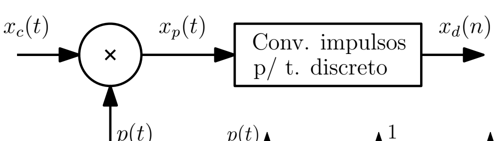
$x(t) = \cos(3\pi t) \to y(t) = |H(j3\pi)|\cos[2t + \angle H(j3\pi)]$, pelo que $H(j3\pi) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi^2}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\dfrac{\sqrt{2}}{\pi^2}$. Como $H(j3\pi) = \dfrac{K}{(j3\pi)^2 + 2\xi\omega_n j3\pi + \omega_n^2} = \dfrac{K}{(-9\pi^2+\omega_n^2) + j6\pi\xi\omega_n}$, então $-9\pi^2 + \omega_n^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_n = 3\pi$ e $\dfrac{K}{6\pi\xi\omega_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi^2} \Leftrightarrow K = 18\sqrt{2}\xi$.

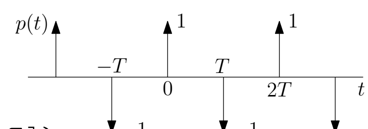
O tempo de pico é $\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1-\xi^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $K = 18$ e $H(s) = \dfrac{18}{s^2 + 3\pi\sqrt{2}s + 9\pi^2}$.

Problema 6.1 $p(t)$ tem período $2T$ e SF com coeficientes

$$a_k = \frac{1}{2T}\int_T p(t)e^{-jk(\pi/T)t}\,dt = \frac{1}{2T}\left(1 - e^{-jk\pi}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ 1/T & k \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$P(j\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{T}\right) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left[\omega - (2k+1)\frac{\pi}{T}\right].$$





Pela propriedade do produto, $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}X_c(j\omega) * P(j\omega) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left\{j\left[\omega - (2k+1)\frac{\pi}{T}\right]\right\}$.

A transformação de x_p para x_d é conhecida: $X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\big|_{\omega=\Omega/T} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left\{j\left[\frac{\Omega-(2k+1)\pi}{T}\right]\right\}$.

Problema 6.2 Se $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \pi/T$, o teorema da amostragem garante que é possível recuperar $x_c(t)$ a partir das amostras $x_c(nT)$. Como $x_c(nT)$ se pode obter a partir de $x_d(n)$, é sempre possível recuperar $x_c(t)$ a partir de $x_d(n)$. Para tal, basta multiplicar $x_d(n)$ por $(-1)^n$ e passar o sinal resultante, $x_c(nT)$, por um reconstrutor ideal para o período T.

Nota: o problema 6.1 pode-se resolver de forma igualmente simples usando o conhecimento de que $x_d(n) = x_c(nT)(-1)^n$ para relacionar $X_d(e^{j\Omega})$ com a TF de $x_c(nT)$ (que se relaciona com $X_c(j\omega)$ de forma conhecida).