Sinais e Sistemas – 2º teste – 19/12/2014 – Exemplo de resolução

Questão 1 $H(s)$ racional, RC um semi-plano direito que não contém o eixo imaginário $\Longrightarrow$ sistema causal e instável.

Questão 2 Pelo diagrama de amplitude, o sistema tem um zero em $z = \pm 1$ e um pólo em -10. Pelo diagrama de fase, $z = 1$. $H(s) = k(s-1)/(s+10)$. Pelos diagramas, $|H(0)| = -20\text{dB} = 0.1$ e $\angle H(0) = \pi$, pelo que $H(0) = -0.1$ e $k = 1$.

Questão 3 $y(n) + y(n-1) - 3y(n-2) = 2x(n) - x(n-1)$.

Questão 4 $\omega_M = 5\pi$. $\omega_s > 2\omega_M \Leftrightarrow 2\pi/T > 10\pi \Leftrightarrow T < 0.2$.

Questão 5 $\omega_s = 2\pi/0.2 = 10\pi$, $\omega_M = \pi < \omega_s/2$. $\omega_c = \Omega_c/T = (\pi/4)/0.2 = 5\pi/4$. Como $\pi < 5\pi/4$, $y(t) = 3 + 2\sin(\pi t)$.

Questão 6 $s(+\infty) = H(0) = 0.5$ (c,d,g,h). $\omega_n^2 = 4 \Rightarrow \omega_n = 2$, $2\xi\omega_n = 1 \Rightarrow \xi = 1/4$ (c,g). $t_p = \pi/(2\sqrt{1-1/16}) \simeq 1.6$ (g).

Problema 1 As transformadas de Fourier (TF) de $x_1(n)$ e $y_1(n)$ são imediatas: $X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$, $Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$.
Como $X_1(e^{j\omega}) \neq 0, \forall_\omega$, a resposta em frequência do sistema é $H(e^{j\omega}) = \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X_1(e^{j\omega})} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$.
A TF de $x_2(n)$ é $X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$. A TF da resposta $y_2(n)$ é $Y_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$.
$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$, com $A = \frac{1-\frac{1}{2}(3)}{1+\frac{1}{2}(3)} = -\frac{1}{5}$ e $B = \frac{1-\frac{1}{2}(-2)}{1-\frac{1}{3}(-2)} = \frac{6}{5}$, pelo que $y_2(n) = \left[\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$.

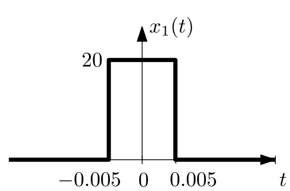
Problema 2 A transformada de Laplace (TL) de $x(t)$ é $X(s) = 3 - \frac{1}{s+1} = \frac{3s+2}{s+1}$, $\text{Re}(s) > -1$ (TL conhecidas e linearidade da TL). Usando a propriedade da convolução, a TL da resposta $y(t)$ é $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{(3s+2)s^2}{(s+1)(s^2-1)}$, $-1 < \text{Re}(s) < 1$.
$Y(s) = \frac{3s^3+2s^2}{s^3+s^2-s-1} = 3 + \frac{-s^2+3s+3}{s^3+s^2-s-1} = 3 + \frac{-s^2+3s+3}{(s+1)(s^2-1)} = 3 + \frac{-s^2+3s+3}{(s+1)(s+1)(s-1)} = 3 + \frac{-s^2+3s+3}{(s+1)^2(s-1)} = 3 + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$.
$A = \frac{-(1)^2+3(1)+3}{(1+1)^2} = \frac{5}{4}$, $C = \frac{-(-1)^2+3(-1)+3}{-1-1} = \frac{1}{2}$, $A(s+1)^2 + B(s+1)(s-1) + C(s-1) = -s^2+3s+3 \Rightarrow A + B = -1 \Rightarrow B - \frac{9}{4}$.

$$Y(s) = 3 + \underbrace{\frac{5/4}{s-1}}_{\text{Re}(s)<1} + \underbrace{\frac{-9/4}{s+1}}_{\text{Re}(s)>-1} + \underbrace{\frac{1/2}{(s+1)^2}}_{\text{Re}(s)>-1} \iff y(t) = 3\delta(t) - \tfrac{5}{4}e^t u(-t) + \left(-\tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{2}t\right)e^{-t}u(t).$$

Problema 3 O diagrama representa a ligação em série de dois sistemas re-alimentados cujas funções de transferência são $H_1(s) = \frac{\frac{K}{s-2}}{1-\frac{K}{s-2}} = \frac{K}{s-2-K}$ e $H_2(s) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}(-s)} = \frac{1}{3+s}$. A função de transferência do sistema $x(t) \to y(t)$ é então $H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{K}{(s-2-K)(s+3)}$. Para $K = 0$, tem-se $H(s) = 0$, pelo que o sistema é estável. Para $K \neq 0$, o sistema é estável se e só se os seus pólos (em $2 + K$ e -3) estiverem no semi-plano esquerdo, ou seja, se $2 + K < 0 \Leftrightarrow K < -2$.

Problema 4 A energia de $x(t)$ é $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$.
Nas condições do teorema da amostragem (TA), $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi/T = 10\pi$, pelo que $E = \frac{1}{2\pi}\int_{-10\pi}^{10\pi} |X(j\omega)|^2\,d\omega$.
A energia de $x_d(n)$ é $E_d = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_d(n)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X_d(e^{j\Omega})|^2\,d\Omega$.
Nas condições do TA, para $-\pi < \Omega < \pi$, tem-se $X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}X(j\Omega/T) = 10X(j10\Omega)$, pelo que:
$E_d = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |10X(j10\Omega)|^2\,d\Omega = \frac{100}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(j10\Omega)|^2\,d\Omega = \frac{100}{2\pi}\int_{-10\pi}^{10\pi} |X(j\omega)|^2 10\,d\omega = \frac{10}{2\pi}\int_{-10\pi}^{10\pi} |X(j\omega)|^2\,d\omega = 10E = 40$.

No caso das condições do TA não serem verificadas, a energia de $x(t)$ não determina univocamente a de $x_d(n)$. Por exemplo, o sinal em seguida ilustrado, de expressão $x_1(t) = 20[u(t+0.005) - u(t-0.005)]$ tem energia $E_1 = 2 \times 0.005 \times 20^2 = 4$



e origina $x_{1d}(n) = 20\delta(n)$, que tem energia $E_{1d} = 400$; por outro lado, o sinal $x_2(t) = x_1(t - 0.05)$ tem também energia $E_2 = 4$ mas origina $x_{2d}(n) = 0$, que tem energia $E_{2d} = 0$. Para mostrar que E_d pode mesmo tomar qualquer valor, podemos sistematizar o exemplo: sendo $x(t) = \alpha\, x_1(t) + \sqrt{1-\alpha^2}\, x_2(t)$, com $0 \leq \alpha \leq 1$, temos $E = \alpha^2 4 + (1-\alpha^2)4 = 4$ e obtemos $x_d(n) = 20\alpha\delta(n)$, pelo que $E_d = 400\alpha^2$; para obter E_d superior a 400, podemos considerar simplesmente uma compressão e ampliação de $x_1(t)$: o sinal $x(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}x_1(t/\beta)$, com $0 < \beta \leq 1$, tem $E = \frac{1}{\beta}\beta 4 = 4$, e dá origem a $x_d(n) = \frac{20}{\sqrt{\beta}}\delta(n)$, para o qual $E_d = 400/\beta$.