Sinais e Sistemas – 1º teste – 3/11/2014 – Exemplo de resolução

Questão 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} |(1/4)^n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (1/16)^n = \frac{1/16}{1-1/16} = 1/15.$

Questão 2 $x(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = t\delta(t-3) = 3\delta(t-3).$

Questão 3 Para $t < 2$, tem-se $x_1(t) = x_2(t)$ mas isso não acontece com $y_1(t)$ e $y_2(t)$ ($y_1(t) \neq y_2(t)$ para $1 < t < 2$). Assim, o sistema é não causal. É fácil constatar que não se pode garantir a veracidade de nenhuma das outras afirmações.

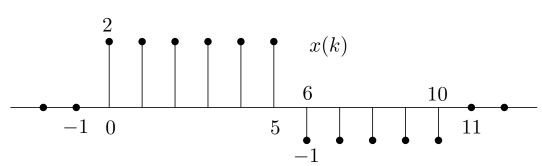
Questão 4 É imediato que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$ (SLIT instável) para a), b), e) , f) e que $h(n) = k\delta(n)$ para c) (SLIT sem memória). Para d), tem-se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = 1 < \infty$ (SLIT estável) e $h(1) = 1 \neq 0$ (SLIT com memória).

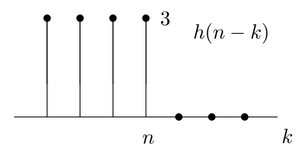
Questão 5 $x(t) = \cos(3t) \longrightarrow y(t) = |H(j3)| \cos[3t + \arg H(j3)]$. $H(j3) = 6 - 6j = 6\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$.

Questão 6 $H(j\omega) = \frac{2j\omega+3}{(j\omega)^2+3j\omega+1} = \frac{3+j2\omega}{1-\omega^2+j3\omega}$.

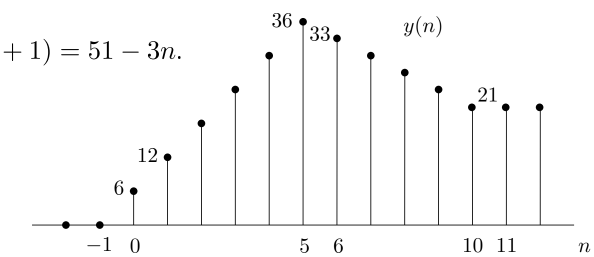
Questão 7 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(n+3) + \delta(n-3)]e^{-j\omega n} = e^{j\omega 3} + e^{-j\omega 3} = 2\cos(3\omega)$.

Problema 1 $y(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$.





Para $n \leq -1$, $y(n) = 0$.
Para $0 \leq n \leq 5$, $y(n) = \sum_{k=0}^{n} 2 \times 3 = 6(n+1) = 6n + 6$.
Para $6 \leq n \leq 10$, $y(n) = \sum_{k=0}^{5} 6 + \sum_{k=6}^{n} (-1) \times 3 = 36 - 3(n - 6 + 1) = 51 - 3n$.
Para $n \geq 11$, $y(n) = \sum_{k=0}^{5} 6 + \sum_{k=6}^{10} (-3) = 36 - 15 = 21$.



Problema 2 A resposta em frequência do filtro é $H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 3\pi \\ 0 & |\omega| > 3\pi \end{cases}$.

2.1) A TF de $\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$ é $\begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$.

Usando as propriedades da linearidade e deslocamento no tempo, obtem-se $X_1(j\omega) = \begin{cases} \pi e^{-j\omega 3} & |\omega| < 11 \\ 0 & |\omega| > 11 \end{cases}$.

A TF da resposta do filtro é $Y_1(j\omega) = X_1(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} \pi e^{-j\omega 3} & |\omega| < 3\pi \\ 0 & |\omega| > 3\pi \end{cases}$, pelo que $y_1(t) = \dfrac{\sin[3\pi(t-3)]}{t-3}$.

2.2) $x_2(t)$ tem SF com coeficientes a_k. A resposta $y_2(t)$ é periódica de período 1, com SF de coeficientes $b_k = a_k H(jk\omega_0)$, onde $\omega_0 = 2\pi/1 = 2\pi$. Para $|k| \geq 2$, tem-se $|k2\pi| > 3\pi$ e $H(jk2\pi) = 0$, pelo que $b_k = 0$, para $k \neq -1, 0, 1$.
$b_0 = a_0 H(j0) = a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 x_2(t)\,dt = 2 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{3}{4} = 5.$
$b_1 = a_1 H(j2\pi) = a_1 = \int_{1/4}^{1} 4e^{-j2\pi t}\,dt$ (somar uma constante ao sinal apenas altera o coeficiente de índice 0 da SF).
$b_1 = \frac{4}{-j2\pi}\, e^{-j2\pi t}\big|_{1/4}^{1} = \frac{2j}{\pi}(e^{-j2\pi} - e^{-j\pi/2}) = \frac{2j}{\pi}(1+j) = \frac{2}{\pi}(-1+j) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{j3\pi/4}$. Como $y_2(t)$ é real, $b_{-1} = b_1^* = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{-j3\pi/4}$.
Assim, $y_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk2\pi t} = 5 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{j3\pi/4}e^{j2\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{-j3\pi/4}e^{-j2\pi} = 5 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cos(2\pi t + 3\pi/4)$.

Problema 3 Sendo de energia finita os sinais têm TF. $E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$. Sendo $H_i(j\omega)$ a resposta em frequência do SLITi, $R(j\omega) = X(j\omega)H_2(j\omega)$, pelo que $E_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |R(j\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 |H_2(j\omega)|^2\,d\omega$.

$z(t) = y(t) \Leftrightarrow Z(j\omega) = Y(j\omega)$. Como $Y(j\omega) = H_1(j\omega)X(j\omega)$ e $Z(j\omega) = H_1^2(j\omega)X(j\omega)$, $H_1^2(j\omega)X(j\omega) = H_1(j\omega)X(j\omega)$. Como a igualdade é válida para qualquer $X(j\omega)$, $H_1^2(j\omega) = H_1(j\omega)$, pelo que $H_1(j\omega) = 0$ ou $H_1(j\omega) = 1$, $\forall_\omega$.

Também para qualquer $X(j\omega)$ se tem $s(t) = x(t) \Leftrightarrow S(j\omega) = X(j\omega)$. Como $S(j\omega) = [H_1(j\omega) + H_2(j\omega)]X(j\omega)$, $H_1(j\omega) + H_2(j\omega) = 1 \Leftrightarrow H_2(j\omega) = 1 - H_1(j\omega)$, pelo que $H_2(j\omega) = 1$ ou $H_2(j\omega) = 0$, $\forall_\omega$. Assim, $|H_2(j\omega)| \leq 1$ e $E_r \leq E_x$.