Sinais e Sistemas – Exame – 15/1/2015 – Exemplo de resolução

Questão 1 $x(n) = \sin(\omega n) \Rightarrow N_0 =$ menor múltiplo inteiro de $2\pi/\omega$. $2\pi/(4\pi/5) = 10/4 = 5/2$. $N_0 = 5$.

Questão 2 $y(t) = t^3 u(t)\delta(t-2) = 2^3 u(2)\delta(t-2) = 8\delta(t-2)$.

Questão 3 Os sinais $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são diferentes mas as respectivas respostas $y_1(n)$ e $y_2(n)$ são iguais, o que mostra que o sistema não é invertível. (Facilmente se vê que não se pode garantir a veracidade de nenhuma das outras afirmações.)

Questão 4 $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = 3 < \infty \Rightarrow$ sistema estável. Para para $-1 < t < 0$, $h(t) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ sistema não causal.

Questão 5 $x(t) = \cos(3t) \to y(t) = |H(j3)| \cos(3t + \angle H(j3))$. Pelo gráfico, $|H(j3)| = 2$. (Facilmente se conclui também que $\angle H(j3) = \pi$, ou seja, que $H(j3) = -2$, embora este passo até nem seja necessário para seleccionar a resposta.)

Questão 6 $H(j\omega) = \frac{-3+j\omega}{3-2\omega^2+j\omega}$.

Questão 7 $H(e^{j\omega}) = \frac{2+e^{-j\omega}}{1-3e^{-j2\omega}}$.

Questão 8 SLIT causal e estável $\Rightarrow$ todos os pólos no semi-plano esquerdo, o que só acontece com $H(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$.

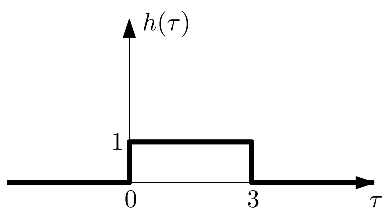
Questão 9 Pelo diagrama de amplitude, o sistema tem um zero na origem e um pólo duplo em -10: $H(s) = \frac{ks}{(s+10)^2}$.
$|H(j1)|_{\text{(aproximação assimptótica)}} = \frac{|k|1}{10^2} = \frac{|k|}{100}$. Pelo diagrama de amplitude, $|H(j1)| = -20\text{dB} = 0.1 \Rightarrow |k| = 10$
(Pelo diagrama de fase pode-se concluir que $k = 10$ mas este passo não é necessário para seleccionar a resposta.)

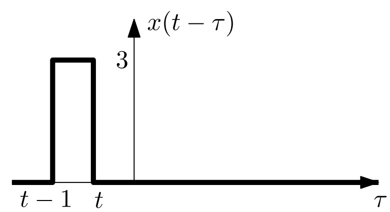
Questão 10 $s(+\infty) = 4$; $0.95 \times 4 = 3.8$; $s(6) = 3.8 \Rightarrow t_s = 6 \Rightarrow \tau = 2$. $H(s) = \frac{k}{s+1/2}$. $H(0) = 4 \Rightarrow k = 2$. $H(s) = \frac{4}{2s+1}$.

Questão 11 $\omega_s = 2\pi/0.25 = 8\pi$. $x(t)$ tem que ser de banda limitada a $\omega_M < \omega_s/2 = 4\pi$. $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq 4\pi$ é a única das hipóteses fornecidas que o garante.

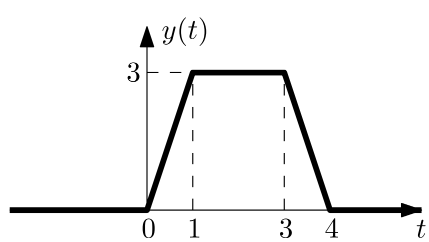
Questão 12 Para a entrada $x(t) = 2 + \sin(\pi t)$ (que respeita as condições do Teorema da Amostragem), o sistema $x(t) \to y(t)$ comporta-se como um filtro passa-alto ideal de frequência de corte $(\pi/3)/0.25 = 4\pi/3$, pelo que $y(t) = 0$.

Problema 1 O sinal de saída é $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau$.

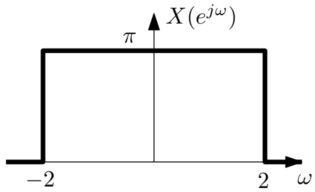


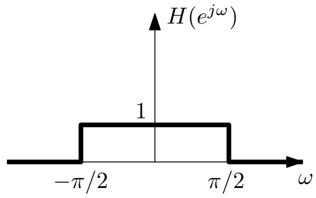


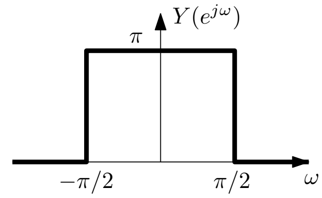
Para $t < 0$, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, d\tau = 0$.
Para $t > 0 \wedge t-1 < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t 3\, d\tau = 3(t-0) = 3t$.
Para $t < 3 \wedge t-1 > 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3$, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{t} 3\, d\tau = 3(t-(t-1)) = 3$.
Para $t > 3 \wedge t-1 < 3 \Leftrightarrow 3 < t < 4$, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{3} 3\, d\tau = 3(3-(t-1)) = 12-3t$.
Para $t-1 > 3 \Leftrightarrow t > 4$, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, d\tau = 0$.



Problema 2 A Transformada de Fourier (TF) de $x(n)$ é imediata a partir de uma TF conhecida e da propriedade da linearidade. Usando a propriedade da convolução, a TF de $y(n)$ é $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$. Para $-\pi < \omega < \pi$, temos:







Assim, usando novamente a linearidade da TF, $y(n) = \mathrm{TF}^{-1}\left[Y(e^{j\omega})\right] = \frac{\sin((\pi/2)n)}{n}$.

Problema 3 $x(t)$ tem frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$ e Série de Fourier (SF) de coeficientes a_k. A SF de $y(t)$ tem coeficientes $b_k = a_k H(jk\omega_0)$: $b_2 = a_2 H(j\pi) = 2a_2$, $b_{-2} = a_{-2}H(-j\pi) = 2a_{-2}$ e $b_k = a_k H(jk\pi/2) = 0, k \neq -2, 2$.
$a_2 = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{4}\int_3^4 4e^{-j\pi t}\,dt = \frac{e^{-j4\pi}-e^{-j3\pi}}{-j\pi} = \frac{2}{-j\pi}$. Como $x(t)$ é real, $a_{-2} = a_2^* = \frac{2}{j\pi}$.
$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = 2\frac{2}{j\pi}e^{j(-2)(\pi/2)t} + 2\frac{2}{-j\pi}e^{j2(\pi/2)t} = \frac{4}{\pi}\frac{e^{-j\pi t}-e^{j\pi t}}{j} = -\frac{8}{\pi}\sin(\pi t)$.

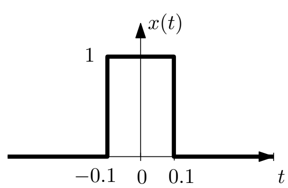
Problema 4 Usando TF conhecidas e a propriedade da linearidade, $X(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{1-(1/3)e^{-j\omega}} = \frac{2-(1/3)e^{-j\omega}}{1-(1/3)e^{-j\omega}}$.
Pela propriedade da convolução, $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{2-(1/3)e^{-j\omega}}{[1-(1/3)e^{-j\omega}][1-(5/6)e^{-j\omega}+(1/6)e^{-j2\omega}]}$.
Denotando $z = e^{-j\omega}$, tem-se $Y(e^{j\omega}) = \frac{2-(1/3)z}{[1-(1/3)z][1-(5/6)z+(1/6)z^2]} = \frac{6(z-6)}{(z-3)(z^2-5z+6)} = \frac{6(z-6)}{(z-3)[(z-2)(z-3)]} = \frac{6(z-6)}{(z-2)(z-3)^2}$.
$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{(z-3)^2}$. $A = \frac{6(2-6)}{(2-3)^2} = -24$, $C = \frac{6(3-6)}{3-2} = 18$. $A(z-3)^2 + B(z-2)(z-3) + C(z-2) = 6(z-6) \Rightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = 24$.
$Y(e^{j\omega}) = \frac{12}{1-(1/2)e^{-j\omega}} + \frac{-8}{1-(1/3)e^{-j\omega}} + \frac{2}{(1-(1/3)e^{-j\omega})^2}$. Com TF conhecidas: $y(n) = \left[12\left(\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$.

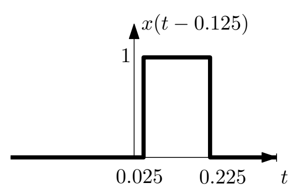
Problema 5 A Transformada de Laplace (TL) de $u(t)$ é $\frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$; a TL de $e^{-2t}u(t)$ é $\frac{1}{s+2}$, $\mathrm{Re}(s) > -2$. Assim, usando a propriedade da convolução, $\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s}H(s)$, pelo que a função de transferência do sistema é $H(s) = \frac{s}{s+2}$, $\mathrm{Re}(s) > -2$.
Usando uma TL conhecida e a propriedade da linearidade, obtem-se a TL de $x(t)$: $X(s) = -\frac{1}{s-3}$, $\mathrm{Re}(s) < 3$.
Usando a propriedade da convolução, $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{-s}{(s-3)(s+2)}$, $-2 < \mathrm{Re}(s) < 3$.
$Y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}$. $A = \frac{-3}{3+2} = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{-(-2)}{-2-3} = -\frac{2}{5}$. Usando TL conhecidas, $y(t) = \frac{3}{5}e^{3t}u(-t) - \frac{2}{5}e^{-2t}u(t)$.

Problema 6 A função de transferência do sistema é $H(s) = \left(\frac{1}{s^2+4s}\right) / \left(1 - (-K)\frac{1}{s^2+4s}\right) = \frac{1}{s^2+4s+K}$, tratando-se então de um sistema de segunda ordem sem zeros. De $s^2+4s+K = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$, obtem-se $\omega_n = \sqrt{K}$ $(K > 0)$ e $\xi = 2/\sqrt{K}$.
Para que $s(t)$ seja monótono, o sistema tem que ser sobre- ou criticamente amortecido: $\xi \geq 1 \Leftrightarrow 2/\sqrt{K} \geq 1 \Rightarrow K \leq 4$.
Quanto à condição respeitante ao valor final: $s(+\infty) < 2 \Leftrightarrow H(0) < 2 \Leftrightarrow 1/K < 2 \Leftrightarrow K > 1/2$. Assim, $K \in (1/2, 4]$.

Problema 7.1 Para sinais $x(t)$ que respeitem as condições do TA, o sistema $x(t) \to y(t)$ é o SLIT de resposta em frequência $H_c(j\omega) = H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T}$, $|\omega| < \pi/T$, onde $H(e^{j\Omega})$ é a resposta em frequência de S. Usando TF conhecidas e as propriedades da linearidade e deslocamento, $H(e^{j\Omega}) = \mathrm{TF}[h(n)] = 1 + e^{-j3\Omega}$, pelo que $H_c(j\omega) = 1 + e^{-j3\omega/4}$, $|\omega| < 4\pi$.
Como existem valores de $\omega \in (-4\pi, 4\pi)$ que anulam $H_c(j\omega)$, o sistema $x(t) \to y(t)$ não é invertível. Por exemplo, as respostas aos sinais de entrada $x(t) = 0$ e $x(t) = \sin(4\pi t/3)$ são ambas $y(t) = 0$, o que demonstra a falsidade da afirmação.

Problema 7.2 Para sinais de entrada genéricos, não há garantias de que o sistema $x(t) \to y(t)$ seja um SLIT. Em particular, não é invariante no tempo, ou seja, a afirmação é falsa, como um simples contra-exemplo permite demonstrar.
Consideremos o sinal de entrada $x(t) = u(t+0.1) - u(t-0.1)$:





Este sinal origina $x_d(n) = \delta(n)$, pelo que $y_d(n) = h(n) = \delta(n) + \delta(n-3)$. Como o reconstrutor faz uma interpolação usando a função $h(t) = \frac{\sin[(\pi/T)t]}{(\pi/T)t} = \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t}$, obtem-se o sinal de saída $y(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t} + \frac{\sin[4\pi(t-3T)]}{4\pi(t-3T)} = \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t} - \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t - 3\pi} = \frac{-3\sin(4\pi t)}{4\pi t(4t-3)}$.
A resposta ao sinal $x(t)$ deslocado de 0.125 é diferente de $y(t)$ deslocado do mesmo valor. De facto, considerando o sinal de entrada $x(t-0.125)$, obtem-se $x_d(n) = 0$, $y_d(n) = 0$ e $y(t) = 0$, o que demonstra a falsidade da afirmação.